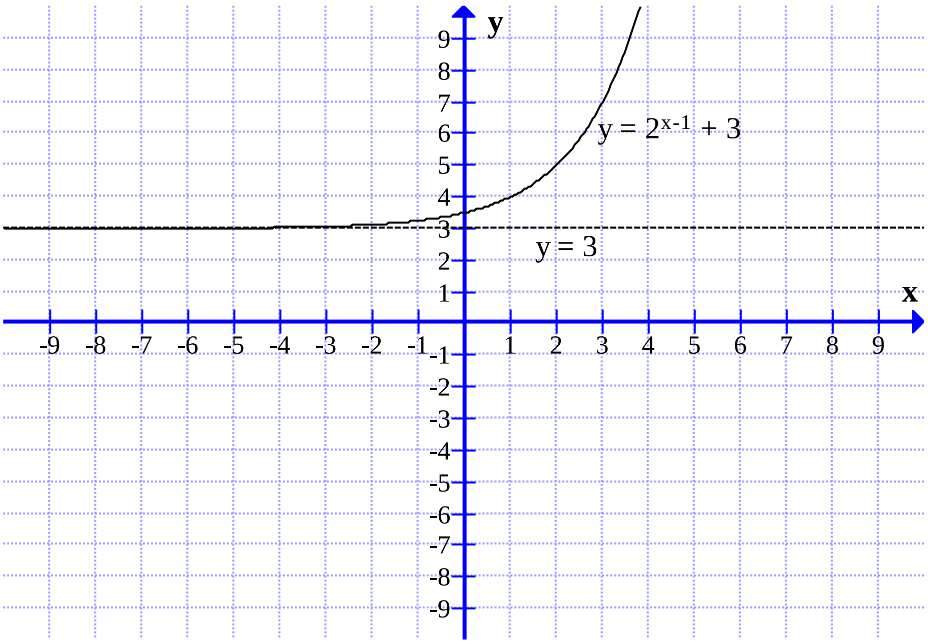
I

$$f(x) = 2^{x-1} + 3$$



1. *Wyznaczenie dziedziny*:

   $D = R$ *funkcja jest określona dla każdego* $x \in R$

2. *Zbiór wartości funkcji*:

   $Y = (3; \infty)$

3. *Funkcja nie ma miejsc zerowych*:

   $$\text{bo } 2^{x-1} + 3 > 0 \ \ dla\ każdego\ x \in D$$

4. *Punkt przecięcia z osią OX*: *nie ma , bo nie ma miejsc zerowych*

   Punkt przecięcia z osią OY: $2^{0-1} + 3 = 2^{-1} + 3 = \frac{1}{2} + 3 = 3\frac{1}{2}$

5. *Granice funkcji*:

   $\lim_{x\to\infty} (2^{x-1} + 3) = 2^{\infty} + 3 = \infty$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} (2^{x-1} + 3) = 2^{-\infty} + 3 = 0 + 3 = 3$

6. *Funkcja nie ma asymptot pionowych bo jest określona dla każdego* x $(D = R)$

   Funkcja ma asymptotę poziomą: $y = 3$, *bo* $\lim\limits_{x\to-\infty} (2^{x-1} + 3) = 3$

   Asymptoty ukośne:

   $$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2^{x-1} + 3}{x} =$$

   $$\left(jest\ to\ wyrażenie\ nieoznaczone\ \frac{\infty}{\infty}\ więc\ stosuję\ regułę\ de\ l'Hospitala\right)$$

   $$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(2^{x-1} + 3)'}{x'} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2^{x-1}}{1} = \infty$$

   Funkcja nie ma asymptot ukośnych.

7.

$f'(x) = (2^{x-1} + 3)' = 2^{x-1} > 0 \; dla \; każdego \; x$

$czyli$:

$w \; całej \; dziedzinie \; funkcja \; jest \; rosnąca$
$nie \; istnieje \; takie \; x \; dla \; którego \; f'(x) = 0, czyli \; funkcja \; nie \; ma \; ekstremum \; (minimum \; i \; maksimum)$

8. $Funkcja \; jest \; różnowartościowa - dla \; żadnej \; pary \; argumentów \; x_1 \; x_2 \; nie \; zachodzi \; f(x_1) = f(x_2)$
9. $Funkcja \; nie \; jest \; ani \; parzysta$

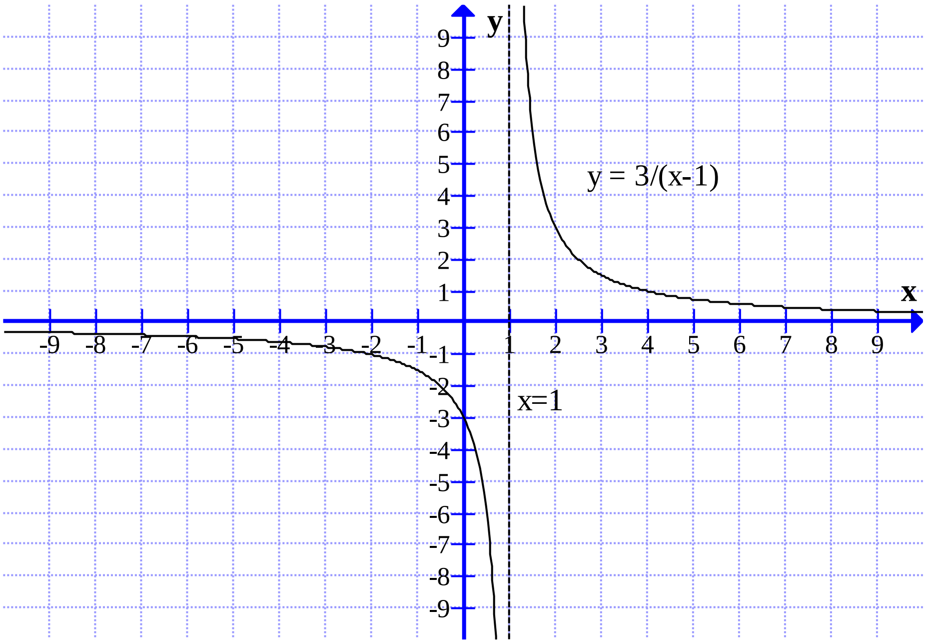
$$f(-x) = 2^{-x-1} + 3 \neq f(x)$$

$ani \; nieparzysta$

$$f(-x) = 2^{-x-1} + 3 \neq -f(x)$$

II

$$f(x) = \frac{3}{x-1}$$



1. $Wyznaczenie \; dziedziny$:

$x - 1 \neq 0 => x \neq 1 \qquad D = R - \{1\}$

2. $Zbiór \; wartości \; funkcji$:

$Y = R - \{0\}$

3. $Funkcja \; nie \; ma \; miejsc$ zerowych:

$$\text{bo} \quad f(x) = \frac{3}{x-1} = 0 <=> 3 = 0 \;\; sprzeczność$$

4. $Punkt \; przecięcia \; z \; osią \; OX$: $nie \; ma$, $bo \; nie \; ma \; miejsc \; zerowych$

$Punkt \; przecięcia \; z \; osią \; OY$: $\frac{3}{0-1} = -3$

5. *Granice funkcji*:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to1^-} \frac{3}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} \frac{3}{x-1} = \infty$$

6. *Funkcja ma asymptotę pionową obustronną* $x = 1$ *co wynika z faktu, że granice w tym punkcie to* $\pm\infty$

Funkcja ma asymptotę poziomą obustronną : $y = 0$, *bo* $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x-1} = 0$

Asymptoty ukośne:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{3}{x-1}}{x} = \frac{3}{x(x-1)} = 0$$

Funkcja nie ma asymptot ukośnych.

7.

$$f'(x) = \left(\frac{3}{x-1}\right)' = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0 \text{ dla każdego } x$$

czyli:

w całej dziedzinie funkcja jest malejąca
nie istnieje takie x *dla którego* $f'(x) = 0$, *czyli funkcja nie ma ekstremum (minimum i maksimum)*

8. *Funkcja jest różnowartościowa − dla żadnej pary argumentów* $x_1\ x_2$ *nie zachodzi* $f(x_1) = f(x_2)$

9. *Funkcja nie jest ani parzysta*:

$$f(-x) = \frac{3}{-x-1} = -\frac{3}{x+1} \neq f(x)$$

ani nieparzysta

$$f(-x) = -\frac{3}{x+1} \neq -f(x)$$