

Traktujemy funkcję podcałkową jako iloczyn funkcji  $f$  i  $g$

$$\int = \int \left( \frac{x}{\sqrt{x+3}} \right) \cdot \left( \ln(\sqrt{x-3}) \right) dx = \int f \cdot g \quad (1)$$

Całkujemy przez części (całkujemy  $f$ , różniczkujemy  $g$ ).

W całce z  $f$  postawiamy:

$$t = \sqrt{x+3} \quad \text{zatem} \quad x = t^2 - 3 \quad \text{oraz} \quad dx = 2t dt$$

Całka z  $f$  przechodzi na:

$$\int f = \int \frac{t^2-3}{t} 2t dt = 2 \left( \frac{t^3}{3} - 3t \right) = \frac{2}{3} t (t^2 - 9) = \frac{2}{3} (x-6) \sqrt{x+3} \quad (2)$$

Pochodna z  $g$  wynosi:

$$g' = \frac{1}{\sqrt{x-3}} \frac{1}{2\sqrt{x-3}} = \frac{1}{2(x-3)} \quad (3)$$

Nasza całka przechodzi w  $\int f - \int (g' \int f)$ , co po podstawieniach z równań (2, 3) daje:

$$\int = \frac{2}{3} (x-6) \sqrt{x+3} \ln(\sqrt{x-3}) - \frac{2}{3} \int (x-6) \sqrt{x+3} \frac{1}{2(x-3)} dx \quad (4)$$

W całce z równania (4) podstawiamy  $t$  jak poprzednio i mamy do policzenia całkę:

$$\int \frac{(t^2-9)t}{2(t^2-6)} 2t dt = \int (t^2-3) dt - 18 \int \frac{1}{t^2-6} dt = \int (t^2-3) dt + \frac{18}{2\sqrt{6}} \left( \int \frac{dt}{t+\sqrt{6}} - \int \frac{dt}{t-\sqrt{6}} \right) \quad (5)$$

(zastosowałem standardowy rozkład funkcji wymiernej). Całka (5) daje:

$$\frac{t^3}{3} - 3t + \frac{18}{2\sqrt{6}} \ln \left( \frac{t+\sqrt{6}}{t-\sqrt{6}} \right) = \frac{1}{3} (x-6) \sqrt{x+3} + \frac{18}{2\sqrt{6}} \ln \left( \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{6}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{6}} \right) \quad (6)$$

Po drobnej kosmetyce i wstawieniu całki (6) do (4) dostajemy:

$$\int = \frac{2}{3} (x-6) \sqrt{x+3} \ln(\sqrt{x-3}) - \frac{2}{9} (x-6) \sqrt{x+3} - \frac{6}{\sqrt{6}} \ln \left( \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{6}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{6}} \right) \quad (7)$$

i jeszcze grupujemy podobne wyrazy:

$$\int = \frac{2}{9} (x-6) \sqrt{x+3} \left[ -1 + 3 \ln(\sqrt{x-3}) \right] - \sqrt{6} \ln \left( \frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{6}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{6}} \right) \quad (8)$$

Wynik (8) po zróżniczkowaniu daje **połowę** funkcji pierwotnej. Naprawdę nie wiem, gdzie robię błąd!