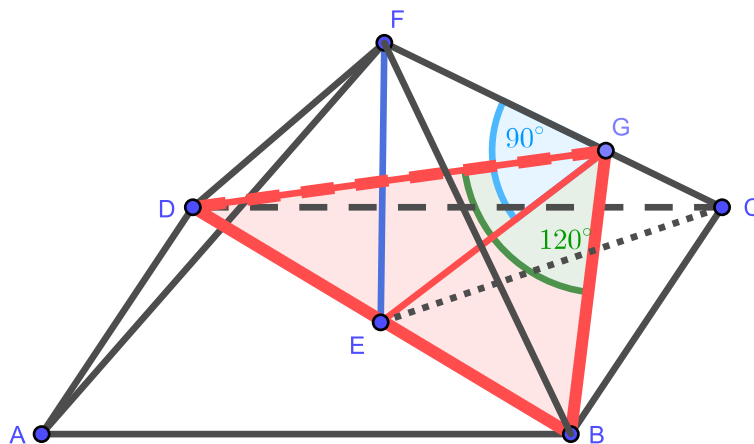


Zadanie: W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość = 5, a kąt między ścianami bocznymi wynosi 120° . Oblicz objętość ostrosłupa.

W tym zadaniu ważne jest, aby uświadomić sobie jak jest położony kąt 120° między ścianami bocznymi. **NIE** jest to kąt mierzony przy podstawie (bo on wynosi 90 stopni, podstawa jest kwadratem). Aby zaznaczyć właściwy kąt prowadzimy dowolną płaszczyznę **prostopadłą** do krawędzi ostrosłupa. Ze względu na późniejsze rachunki wygodnie jest wziąć taką płaszczyznę, która przechodzi przez przekątną DB podstawy.

Patrz rysunek obok. Ze środka (E) podstawy prowadzimy **prostopadłą** EG do krawędzi bocznej. Dorysowujemy czerwone odcinki DB, DG i BG. Różowy trójkąt leży wtedy w wymaganej płaszczyźnie prostopadłej. Kąt DGB to właśnie ten kąt 120° między ściankami bocznymi.

Rysunek wykonany za pomocą programu "Geogebra". Polecam !



Wyznamy sobie teraz "ścieżkę myślową" prowadzącą do rozwiązania. Ja rozumiem tak:

- Gdybyśmy znali długość boku podstawy $|AB|$, to objętość liczymy od razu ze wzoru $V = (1/3)a^2h$, gdzie $h = 5$ to znana wysokość ostrosłupa.
- Długość boku podstawy będziemy znali jeśli znamy długość $|DB|$ przekątnej podstawy, gdyż $|AB| = |DB| / \sqrt{2}$.
- Przekątna podstawy jest jednocześnie podstawą **równoramiennego** trójkąta DBG (tego różowego) i leży naprzeciwko kąta 120° . Jeśli znalibyśmy wysokość EG to obliczymy EB z trójkąta prostokątnego EBG mającego kąt 60° .
- Odcinek EG jest przyprostokątną **prostokątnego** trójkąta EFG. Prostokątnego dlatego, że prowadziliśmy EG prostopadłe do krawędzi. Przeciwprostokątną EF znamy, jest to wysokość = 5. Ale jest kłopot - nie znamy kątów ostrych w tym trójkącie. Nie ta droga...
- Ratujemy się trójkątem prostokątnym EFC (prosty jest kąt przy E). Odcinek EG jest wysokością tego trójkąta. Jedną przyprostokątną to EF o długości 5, druga to kropkowany odcinek EC - połowa przekątnej podstawy. Przerysujmy ten trójkąt z zachowaniem oznaczeń.

Będzie trzeba użyć zmiennej "a" oznaczającej długość boku podstawy. Wtedy $|EC| = a/\sqrt{2}$. Potem będziemy rozumować "od końca".

[ciąg dalszy na następnej stronie](#)

Popatrz na rysunek obok to ten trójkąt wymieniony w ostatnim punkcie na poprzedniej stronie. Chodzi nam o związanie długości $x = |EG|$ z długościami odcinków EF i EC. Można to zrobić np. licząc pole trójkąta na dwa sposoby: albo jako połowa iloczynu $|EF| \cdot |EC|$, albo jako połowa iloczynu $|EG| \cdot |FC|$. Długość $|FC|$ z tw. Pitagorasa to: $|FC| = \sqrt{5^2 + a^2/2}$, więc:

$$\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{5^2 + \frac{a^2}{2}}$$

Wyliczamy stąd "x". Skracamy 1/2 i mamy:

$$x = |EG| = \frac{5a}{\sqrt{2} \sqrt{5^2 + \frac{a^2}{2}}} = \frac{5a}{\sqrt{50 + a^2}}$$

Teraz będziemy wracać do początku. Może warto wydrukować ten plik albo zrobić kopię w osobnym oknie, albo użyć 2-stronicowego podglądu, abyś widziała obie strony na raz?

Cofamy się do punktu w którym EG jest wysokością trójkąta DBG z kątem DGB równym 120° . Wobec tego:

$$\frac{|EB|}{|EG|} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \quad \text{zatem} \quad |EB| = \frac{5a}{\sqrt{50 + a^2}} \sqrt{3}$$

Jednocześnie EB to połowa przekątnej podstawy, więc $|EB| = a/\sqrt{2}$. Dostajemy prawie końcowe równanie:

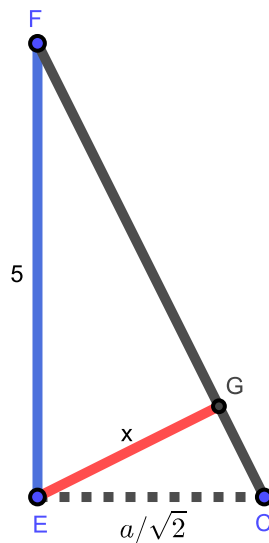
$$\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{5a}{\sqrt{50 + a^2}} \sqrt{3}$$

Teraz jest już "z górki". Mnożymy obie strony przez mianowniki, skracamy jedno "a" i dostajemy:

$$\sqrt{50 + a^2} = 5\sqrt{6} \quad \text{zatem} \quad a^2 = (5\sqrt{6})^2 - 50 = 100$$

Bingo ! Mamy pole podstawy $P = a^2 = 100$. Objętość ostrosłupa wynosi więc:

$$V = \frac{1}{3} a^2 h = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 5 = \frac{500}{3}$$



Jak się pomyliłem albo w razie pytań pisz proszę na priv.
Pozdrowienia - Antek.