

Zadanie:

Miary kątów wielokąta tworzą ciąg arytmetyczny, którego różnica wynosi 4stopnie, a miara największego kąta wynosi 172 stopni. jaka jest liczba boków wielokąta?

Opis:

Niech a_n - *ciąg arytmetyczny*

Ciąg (a_n) jest arytmetyczny $\Leftrightarrow$ istnieje takie $\forall_{r \in R} \bigwedge_{n \in N^+}$ zachodzi równanie $a_{n+1} = a_n + r$.

Wiemy, że ciąg arytmetyczny $\Leftrightarrow r = a_{n+1} - a_n = \text{const}$

$a_n = a_1 + (n-1)r$ - *wyraz ogólny ciągu arytmetycznego*

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} * n$ - *wyraz n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego*

Rozwiązanie:

$r = 4^\circ$ - różnica tego ciągu

Wimy, że: $a_n = 172^\circ$

Wg wzoru ogólnego wyznaczamy:

$$a_n = 172^\circ \quad r = 4^\circ$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$172^\circ = a_1 + (n-1) * 4^\circ$$

Wyznaczamy drugie równanie wiedząc, że suma miar kątów wewnętrznych n-kąta wypukłego jest równa:

$$(n-2) * 180^\circ$$

$$S_n = (n-2) * 180^\circ$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} * n$$

Czyli:

$$(n-2) * 180^\circ = \frac{a_1 + a_n}{2} * n$$

$$(n-2)*180^{\circ} = \frac{a_1 + 172^{\circ}}{2} * n$$

Z poniższego równania wyznaczamy więc a_1 i podstawiamy do powyższego równania.

$$172^{\circ} = a_1 + (n-1)*4^{\circ}$$

$$a_1 = 172^{\circ} - (n-1)*4^{\circ}$$

$$a_1 = 172^{\circ} - 4^{\circ}*n + 4^{\circ}$$

$$a_1 = -4^{\circ}*n + 176^{\circ}$$

Podstawiając do równania poniżej wyznaczone a_1 wyznaczamy liczbę kątów n , czyli:

$$(n-2)*180^{\circ} = \frac{a_1 + 172^{\circ}}{2} * n$$

$$(n-2)*180^{\circ} = \frac{-4^{\circ}*n + 176^{\circ} + 172^{\circ}}{2} * n$$

$$(n-2)*180^{\circ} = \frac{-4^{\circ}*n + 348^{\circ}}{2} * n$$

$$(n-2)*180^{\circ} = \frac{2*(-2^{\circ}*n + 174^{\circ})}{2} * n$$

$$180^{\circ}*n - 360^{\circ} = (-2^{\circ}*n + 174^{\circ}) * n$$

$$180^{\circ}*n - 360^{\circ} = -2^{\circ}*n^2 + 174^{\circ}*n$$

$$180^{\circ}*n - 360^{\circ} + 2^{\circ}*n^2 - 174^{\circ}*n = 360^{\circ}$$

$$2^{\circ}*n^2 + 6^{\circ}*n = 360^{\circ}$$

$$2^{\circ}*n^2 + 6^{\circ}*n - 360^{\circ} = 0$$

Rozwiązując powyższe równanie kwadratowe otrzymamy liczbę kątów n , pamiętając jednocześnie, że:

$$n \in \mathbb{N}$$

Część teoretyczna do funkcji kwadratowych:

$$y = ax^2 + bx + c \quad - \text{postać ogólna funkcji kwadratowej}$$

$$y = a(x - p)^2 + q \quad - \text{postać kanoniczna funkcji kwadratowej}$$

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$ - postać iloczynowa funkcji kwadratowej

Miejsca zerowe wykresu funkcji kwadratowej (miejsca przecięcia funkcji z osią OX) obliczamy wg wzorów:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

gdzie:

a ; b ; c - współczynniki równania funkcji kwadratowej

a - współczynnik kierunkowy funkcji kwadratowej

- jeżeli $a > 0$ - funkcja ma ramiona skierowane do góry
- jeżeli $a < 0$ - funkcja ma ramiona skierowane do dołu

Δ - wyróżnik funkcji kwadratowej

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- jeżeli $\Delta > 0$ - funkcja posiada dwa miejsca zerowe (dwa rozwiązania)
- jeżeli $\Delta = 0$ - funkcja posiada jedno miejsce zerowe (jedno rozwiązanie)
- jeżeli $\Delta < 0$ - funkcja nie posiada miejsc zerowych (0 rozwiązań)

Wierzchołek funkcji kwadratowej (paraboli) ma postać:

$$W = (p ; q)$$

gdzie:

$$p = \frac{-b}{2a} \quad - \text{zaznaczamy na osi OX}$$

W naszym przypadku równanie kwadratowe ma postać:

$$2^\circ * n^2 + 6^\circ * n - 360^\circ = 0$$

$$a = 2^\circ ; \quad b = 6^\circ ; \quad c = -360^\circ$$

W celu lepszej przejrzystości opuszczę w dalszych obliczeniach znak stopni.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 6^2 - 4 * 2 * (-360) = 36 + 2880 = 2916$$

$$\Delta = 2916 > 0 \quad - \text{funkcja posiada dwa miejsca zerowe}$$

$$\sqrt{\Delta} = 54$$

$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{i} \quad n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\sqrt{\Delta} = 54$$

$$n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 54}{2 \cdot 2} = \frac{-60}{4} = -15$$

$$n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 54}{2 \cdot 2} = \frac{48}{4} = 12$$

Jak wiadomo: $n \in \mathbb{N}$, więc:

$$n_1 = -15 \notin \mathbb{N}$$

$$n_2 = 12 \in \mathbb{N}$$

Liczba kątów wielokąta wynosi $n = 12$.

Liczba boków wielokąta będzie wynosiła:

$$n_b = 12$$

Odpowiedź:

Liczba boków wielokąta wynosi $n = 12$.