

Pierwsza funkcja:

$$f(x, y) = e^x (\cos y + x \sin x)$$

Ta funkcja na pewno spełnia przemienność, bo funkcje składowe są wszędzie różniczkowalne więc kolejność obliczania pochodnych cząstkowych nie gra roli. Ale sprawdźmy. Pochodna po x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x (\cos y + x \sin x) + e^x (\sin x + x \cos x)$$

i pochodna po y

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = e^x (-\sin y)$$

W drugą stronę:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^x (-\sin y)$$

i pochodna po x

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = e^x (-\sin y)$$

W tym wypadku twierdzenie z zadania się zgadza.

Druga funkcja:

$$f(x, y) = x^y$$

Ta funkcja jest różniczkowalna dla $x > 0$. Przekształcamy ją do postaci z "e".

$$f(x, y) = e^{y \ln x}$$

Liczmy pochodne

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{y \ln x} \cdot \frac{y}{x}$$

i pochodna po y

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{1}{x} e^{y \ln x} + \frac{1}{x} e^{y \ln x} \cdot \ln x = x^{y-1} (1 + \ln x)$$

W drugą stronę:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{y \ln x} \cdot \ln x$$

i pochodna po x

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = e^{y \ln x} \cdot \frac{y}{x} \ln x + e^{y \ln x} \cdot \frac{1}{x} = x^{y-1} (1 + \ln x)$$

W tym wypadku twierdzenie z zadania też się zgadza przy założeniu dodatniości x.
