

Tekst pisany na niebiesko jest komentarzem, nie należy do rozwiązania.

4.

Liczymy pochodną $h'(x)$. Traktujemy $h(x)$ jako iloczyn funkcji $f(x) = x$ oraz $g(x) = e^{-(1/2)x^2}$. Z kolei $g(x)$ jest funkcją złożoną gdzie $y(x) = -(1/2)x^2$ oraz $g(x) = e^y$. Ze wzorów na pochodną iloczynu i funkcji złożonej mamy:

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + x \cdot (-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = (1 - x^2) e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Ponieważ fragment $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ jest zawsze dodatni to pochodna $h'(x)$ “zachowuje się” jak $1 - x^2$ czyli:

- dla $x = -1$ pochodna zmienia znak z $-$ na $+$ i mamy **minimum**
 - dla $x = +1$ pochodna zmienia znak z $+$ na $-$ i mamy **maksimum**.
 - Funkcja jest **malejąca** w przedziale $(-\infty; -1)$
 - Funkcja jest **rosnąca** w przedziale $(-1; 1)$
 - Funkcja jest **malejąca** w przedziale $(1; +\infty)$
-

5.

Rozkładamy mianownik jako: $(x - 1)(x - 2)$. Mianownik jest zerem dla $x_1 = -1$; $x_2 = -2$ i w tych punktach są asymptoty **pionowe**.

Ponieważ stopień licznika jest o 1 większy od stopnia mianownika funkcja dąży do nieskończoności dla nieskończonych “ x ” i nie ma asymptot poziomych.

Szukamy asymptot ukośnych w postaci: $y = ax + b$ gdzie: (w ostatnim kroku dzielimy licznik i mianownik przez x^2)

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4x}{x(x^2 - 3x + 2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 4/x^2}{1 - 3/x + 2/x^2} = 1 \\ b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 3x + 2} - 1 \cdot x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4x - x^3 + 3x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 4/x - 1/x^2}{1 - 3/x + 2/x^2} = 3 \end{aligned}$$

Dla $x \rightarrow -\infty$ dostajemy te same granice więc jest tylko **jedna asymptota ukośna $y = x + 3$** .

8.

Podstawiamy $y = \ln x$; wtedy $dy = (1/x)dx$ i nasza całka przechodzi w:

$$\int \dots dx = \int y \sqrt{y} dy = \int y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{1}{\frac{5}{2}} y^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} (\ln x)^{\frac{5}{2}} + C$$

9.

Pierwsza z funkcji jest parabolą w kształcie $\cap$, druga linią prostą. Rozwiązanie równania: $4 - x^2 = x + 2$ daje punkty przecięcia obu linii: $x_1 = -2$; $x_2 = 1$. Szukane pole P jest więc równe

$$P = \int_{-2}^1 \left[\int_{x+2}^{4-x^2} dy \right] dx = \int_{-2}^1 (4 - x^2 - (x + 2)) dx = \left| -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right|_{-2}^1 = \frac{9}{2}$$

gdzie całka po “ dy ” w nawiasach kwadratowych oznacza pole “słupka” o szerokości dx zawartego między wykresami obu funkcji, a zewnętrzna całka po “ dy ” sumuje pola tych wszystkich słupków.
