

Zadanie 3.

To jest zadanie z “programowania liniowego”.

Wypiszmy wielkości podane dla surowców S_1 i S_2 oraz produktów P_1 i P_2 . Mamy otrzymać co najmniej 400 ton produktu P_1 . Powstaje on z surowca S_1 z wydajnością 0,28 tony na tonę surowca, oraz z surowca S_2 z wydajnością 0,46 tony na tonę surowca. Niech S_1 i S_2 oznaczają ilości tych surowców, którymi dysponuje zakład. Dla produktu P_1 mamy następujące ograniczenie:

$$400 \leq 0,28 \cdot S_1 + 0,46 \cdot S_2 \quad (1)$$

Analogicznie dla produktu P_2 , którego potrzebujemy w ilości 180 ton, a wydajności wynoszą: 0,25 tony z 1 tony surowca S_1 i 0,10 tony z 1 tony surowca S_2 . Ograniczająca nierówność to:

$$180 \leq 0,25 \cdot S_1 + 0,10 \cdot S_2 \quad (2)$$

Mamy jeszcze dodatkowe ograniczenie na możliwości transportowe zakładu:

$$S_1 + S_2 \leq 1300 \quad (3)$$

Przy tych ograniczeniach chcemy zminimalizować cenę C , równą:

$$C = 900 S_1 + 700 S_2 = \text{minimum} \quad (4)$$

Nierówności (1, 2, 3) i funkcja minimalizująca (4) w pełni określają nasze zadanie. Istnieją gotowe procedury do rozwiązywania tego typu układów, ale spróbujmy zrobić to “ręcznie”. Zobaczymy, jak wyglądają powyższe zależności graficznie (zobacz rysunek “**wykres12.pdf**”). W układzie współrzędnych gdzie poziomą osią jest ilość surowca S_1 , a pionową ilość surowca S_2 narysujmy linie odpowiadające wzorom (1,2, 3) tak, jak gdyby były to równości.

Weźmy nierówność (1) zapisaną w postaci równania:

$$0,28 \cdot S_1 + 0,46 \cdot S_2 = 400 \quad (5)$$

Jest to równanie prostej wiążące ilości obu surowców potrzebnych do produkcji 400 ton produktu P_1 . Narysujemy tę prostą.

Jeżeli byłoby $S_2 = 0$ (to znaczy produkt P_1 byłby wytwarzany wyłącznie z surowca S_1) to masa tego surowca wynosiłaby $S_1 = 400/0,28 \approx 1428,57$ ton. Ten punkt zaznaczamy jako $C(1428,57; 0)$ na poziomej osi.

Jeżeli byłoby $S_1 = 0$ (to znaczy produkt P_1 byłby wytwarzany wyłącznie z surowca S_2) to masa tego surowca wynosiłaby $S_2 = 400/0,46 \approx 869,565$ ton. Ten punkt zaznaczamy jako $D(0; 869,565)$ na pionowej osi.

Łączymy punkty A i B linią prostą (zielona linia) i mamy wykres równania (5).

Analogicznie posługując się równaniem otrzymanym z nierówności (2) rysujemy niebieską linię między punktami $A(180/0,25; 0)$ i $B(0; 180/0,10)$ odpowiadającą ilościom surowców potrzebnych do wyprodukowania 180 ton produktu P_2 .

Na końcu rysujemy czerwony odcinek EF który pokazuje ilości obu surowców gdy suma ich mas jest równa 1300 ton (maksymalna zdolność transportowa zakładu).

Ciąg dalszy na następnej stronie. Proszę trzymaj na ekranie ten tekst i rysunek, bo się do niego wielokrotnie odwołuję.

Na osiach są ilości surowców potrzebne do wytworzenia produktów. Weźmy zieloną linię. Wszystkie punkty na niej położone oznaczają ilości (S_1, S_2) surowców, które wystarczą do produkcji **dokładnie 400 ton** produktu P_1 . Półpłaszczyzna położona na prawo i do góry nad zieloną linią zawiera punkty, które reprezentują nierówność (1) - jak się użyje więcej surowców, to powstanie nadmiar produktów. Natomiast punkty w trójkącie OAD ["O" to punkt $(0; 0)$] są **niedozwolone**, bo powstaje zbyt mało produktu P_1 .

Analogicznie półpłaszczyzna na prawo i w górę od niebieskiej linii oznacza punkty spełniające nierówność (2). Niedozwolone są punkty w trójkącie OAB.

Łączymy powyższe warunki, co daje "dozwolony" obszar na prawo i w górę od łamanej BHC. Ale mamy jeszcze ograniczenia transportu (czerwona linia). Tym razem dozwolone są punkty na półpłaszczyźnie na lewo i poniżej czerwonej linii, ponieważ łączna masa $S_1 + S_2$ nie może przekroczyć 1300 ton.

Jak sobie zakreskujesz odpowiednie półpłaszczyzny to zobaczysz, że obszar optymalizacji ceny jest **ograniczony do trójkąta GHJ**. To **WAŻNE!!!**. Pisz na priv w razie pytań.

Odgradzam te teoretyczne rozważania kreską bo teraz będziemy liczyć. Funkcja ceny $C(S_1, S_2)$ dana wzorem (5) czyli funkcja:

$$C(S_1, S_2) = 900 S_1 + 700 S_2 \quad (6)$$

ma mieć minimum w trójkącie GHJ. Proszę wyobraź sobie teraz trzeci wymiar - cenę - jako oś "C" prostopadłą do ekranu (osie w płaszczyźnie ekranu to S_1 i S_2).

Wtedy równanie (6) przedstawia płaszczyznę, przechodzącą przez punkt $(0; 0; 0)$ i trochę skośną do ekranu (ustaw sobie tak kartkę papieru).

Trójkąt GHJ "przedłuż" prostopadle do ekranu (powstaje graniastosłup o trójkątnej podstawie GHJ, prostopadły do ekranu). Ten graniastosłup przecina się z płaszczyzną cen. Taki twór nazywa się "simplex" i podstawowe twierdzenie programowania liniowego brzmi, że minimum cen osiąga się na **krańcach** simpleksu, czyli w którymś z punktów G, H, J na rysunku. Jak sobie ustawisz tę kartkę przed ekranem to zrozumiesz, dlaczego.

Wystarczy więc policzyć współrzędne punktów G, H, J i znaleźć cenę dla każdego z nich.

Punkt H: Przecinają się w nim proste AB i CD, jest to więc punkt odpowiadający ilościom obu surowców potrzebnej do wyprodukowania **dokładnie** wymaganej minimalnej ilości produktów. Jego współrzędne S_{1H} i S_{2H} otrzymamy z układu równań prostych AB i CD:

$$\begin{cases} 0,28 \cdot S_{1H} + 0,46 \cdot S_{2H} = 400 \\ 0,25 \cdot S_{1H} + 0,10 \cdot S_{2H} = 180 \end{cases} \quad (7)$$

Rozwiązaniami są $S_{1H} = 491,954$ i $S_{2H} = 570,115$. Funkcja ceny (6) ma wtedy wartość: $C(S_{1H}, S_{2H}) = 841839$.

Punkt G: Przecinają się w nim proste AB i EF, jest to więc punkt odpowiadający maksymalnej zdolności transportowej zakładu. Ilość surowca S_2 jest akurat wystarczająca do produkcji, a surowca S_1 jest nadmiar. Współrzędne S_{1G} i S_{2G} otrzymamy z układu równań prostych AB i EF:

$$\begin{cases} 0,25 \cdot S_{1G} + 0,10 \cdot S_{2G} = 180 \\ S_{1G} + S_{2G} = 1300 \end{cases} \quad (8)$$

Rozwiązaniami są $S_{1G} = 333,333$ i $S_{2G} = 966,667$. Funkcja ceny (6) ma wtedy wartość: $C(S_{1G}, S_{2G}) = 976667$, czyli więcej niż w punkcie H. Sprawdzamy jeszcze (na następnej stronie) trzeci z punktów.

Punkt J: Przecinają się w nim proste CD i EF, jest to więc punkt odpowiadający maksymalnej zdolności transportowej zakładu. Ilość surowca S_1 jest akurat wystarczająca do produkcji, a surowca S_2 jest nadmiar. Współrzędne S_{1J} i S_{2J} otrzymamy z układu równań prostych CD i EF:

$$\begin{cases} 0,28 \cdot S_{1J} + 0,46 \cdot S_{2J} = 400 \\ S_{1J} + S_{2J} = 1300 \end{cases} \quad (9)$$

Rozwiązaniami są $S_{1J} = 1100$ i $S_{2J} = 200$. Funkcja ceny (6) ma wtedy wartość: $C(S_{1J}, S_{2J}) = 1130000$, czyli jeszcze większą.

Odpowiedzą do zadania są więc liczby $S_{1H} = 491,954$ i $S_{2H} = 570,115$. Koszt surowców wynosi wtedy 841839 zł.

Sprawdźmy teraz, czy zamiana któregoś surowca na S_3 spowoduje spadek kosztów. Wymieńmy surowiec S_1 na S_3 . Nierówności ograniczające (1, 2) ulegną zmianie bo w miejsce $0,28S_1$ wstawiamy wydajność $0,38S_3$ i podobnie zamieniamy $0,25S_1$ na $0,42S_3$. Nowy układ warunków brzegowych przedstawia rysunek **“wykres32.pdf”**. Dozwolony obszar stał się czworokątem. Surowiec S_3 jest na tyle wydajny że w pełni pozwala na pokrycie zapotrzebowania na oba produkty w ogóle bez udziału surowca S_2 , dlatego oba punkty A i C leżą na lewo od punktu E. Ale to kosztuje. Obliczmy ile. Najmniejsza niezbędna ilość surowca S_3 (punkt C) pokrywająca w pełni wytwarzanie produktu P_1 wynosi $400/0,38 \approx 1052,6$ ton, co daje koszt $1052,6 \cdot 1200 \approx 1260000$, czyli dużo więcej niż minimum znalezione do tej pory. Nie wykluczamy jednak że lepszy rezultat uzyskamy w punktach H lub G.

Rozwiązujemy ponownie układy równań (7,8), ale zamieniamy fragmenty przy S_1 , czyli zamiast układu (7) mamy: S_{1H} i S_{2H} otrzymamy z układu równań prostych AB i CD:

$$\begin{cases} 0,38 \cdot S_{3H} + 0,46 \cdot S_{2H} = 400 \\ 0,42 \cdot S_{3H} + 0,10 \cdot S_{2H} = 180 \end{cases} \quad (10)$$

Rozwiązaniami są $S_{3H} = 275,773$ i $S_{2H} = 641,753$. Funkcja ceny jest także opisywana innym wzorem, zamiast $900S_1$ wstawiamy $1200S_3$ i otrzymujemy $C(S_{3H}, S_{2H}) = 780155$.

W punkcie G zamiast układu równań (8) piszemy:

$$\begin{cases} 0,42 \cdot S_{3H} + 0,10 \cdot S_{2H} = 180 \\ S_{1G} + S_{2G} = 1300 \end{cases} \quad (11)$$

Rozwiązaniami są $S_{3G} = 156,25$ i $S_{2G} = 1143,75$, co daje cenę $C(S_{3G}, S_{2G}) = 988125$, czyli więcej niż w punkcie H.

Jak dotąd najlepsza cenowo możliwość to zamiana surowca S_1 na S_3 . Zobaczmy jeszcze co się stanie, gdy wymienimy na S_3 tańszy, ale mało wydajny surowiec S_2 (patrz rysunek **“wykres13.pdf”**).

Mamy jeszcze inną sytuację. Obszar dozwolony ponownie jest trójkątem i jak poprzednio surowiec S_3 może pokryć zapotrzebowanie na produkty bez udziału surowca S_1 , ale, jak już liczyliśmy, jest to nieopłacalne. Wprowadzamy więc surowiec S_1 aż do granicy możliwości transportowych, tzn. do punktu J. Mamy w tym punkcie układ równań odpowiadający (9) z pierwszej części:

$$\begin{cases} 0,28 \cdot S_{1J} + 0,38 \cdot S_{3J} = 400 \\ S_{1J} + S_{3J} = 1300 \end{cases} \quad (12)$$

Rozwiązaniami są $S_{1J} = 940$ i $S_{3J} = 360$, co daje cenę 1278000 zł. Fatalnie! Wniosek - zamiana S_2 na S_3 jest nieopłacalna.

Końcowa recepta dla zakładu:

Należy wymienić surowiec S_1 na S_3 i zakupić **641,753** ton S_2 oraz **275,773** ton S_3 . Łączna cena wyniesie wtedy **780155** zł i będzie najniższą z możliwych do uzyskania.

Sprawdźmy jeszcze, czy na pewno otrzymamy wymagane ilości produktów.

Produkt P_1

$$0,38 \cdot 275,773 + 0,46 \cdot 641,753 = 400$$

Produkt P_2

$$0,42 \cdot 275,773 + 0,10 \cdot 641,753 = 180$$

Cena:

$$1200 \cdot 275,773 + 700 \cdot 641,753 = 780155$$

Zgadza się!

Pozdrowienia - Antek