

Patrz załącznik “trapez-skalarny.pdf”, tam jest rysunek do zadania. Pooznaczałem tam różne wektory pojedynczymi literami, aby się nie pieprzyć z oznaczeniami dwuliterowymi odcinków. Szybciej się pisze... Zwroty wektorów **są istotne**.

To, co mamy udowodnić, używając tych oznaczeń i pomijając znaczek wektora nad literką gdy chodzi o długość wektora to:

$$x^2 + y^2 = c^2 + d^2 + 2ab \quad (1)$$

Zapiszmy trzy prawdy o sumach wektorów (patrz na rysunek)

$$\begin{cases} \vec{x} = \vec{a} + \vec{d} \\ \vec{y} = -\vec{a} + \vec{c} \\ \vec{a} + \vec{d} = \vec{c} + \vec{b} \end{cases} \quad (2)$$

Powstawiajmy $\vec{x}$ i $\vec{y}$ do lewej strony równania (1), które chcemy udowodnić. Ale, ok, zrobmy to po kolei, najpierw obliczmy kwadraty długości wektorów. Dalej takie kółko: $\circ$ oznacza iloczyn skalarny wektorów:

$$\begin{cases} x^2 = (\vec{a} + \vec{d}) \circ (\vec{a} + \vec{d}) = a^2 + d^2 + 2\vec{a} \circ \vec{d} \\ y^2 = (-\vec{a} + \vec{c}) \circ (-\vec{a} + \vec{c}) = a^2 + c^2 - 2\vec{a} \circ \vec{c} \end{cases} \quad (3)$$

Dodajemy równania (3) stronami, zauważ, coś już zaczyna wychodzić...

$$x^2 + y^2 = c^2 + d^2 + 2a^2 + 2\vec{a} \circ \vec{d} - 2\vec{a} \circ \vec{c}$$

Ponieważ $a^2 = \vec{a} \circ \vec{a}$ możemy wyłączyć $2\vec{a}$ przed nawias:

$$x^2 + y^2 = c^2 + d^2 + 2\vec{a} \circ (\vec{a} + \vec{d} - \vec{c}) \quad (4)$$

Zerknij teraz na “prawdy” we wzorach (2). Z trzeciego z nich wynika, że: $\vec{b} = \vec{a} + \vec{d} - \vec{c}$, czyli dokładnie to, co mamy w nawiasie we wzorze (4). Wobec tego:

$$x^2 + y^2 = c^2 + d^2 + 2\vec{a} \circ \vec{b} \quad (5)$$

Wzór (5) jest prawdziwy dla **każdego** wypukłego czworokąta, ale nie dowodzi jeszcze twierdzenia z zadania, gdyż jest tam iloczyn skalarny $\vec{a} \circ \vec{b}$. Ale w zadaniu czworokąt jest trapezem, czyli wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ są **równoległe**. W tej sytuacji iloczyn skalarny to po prostu iloczyn długości, czyli mamy:

$$x^2 + y^2 = c^2 + d^2 + 2ab$$

co było do udowodnienia.

To, że trapez jest prostokątny, jest psu na budę, wzór jest prawdziwy dla każdego trapezu.

Pozdrowienia - Antek