Tekst na niebiesko jest komentarzem lub treścią zadania.

Zadanie 11. (plik 21.jpg)

Rozwiąż: $3\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \quad \text{dla} \quad x\in(0;2\pi)$

Przekształcamy lewą stronę równania używając wzorów na sinus różnicy i kosinus sumy kątów.

$$3\sin x\,\cos\frac{\pi}{4}-3\cos x\,\sin\frac{\pi}{4}+\cos x\,\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\,\sin\frac{\pi}{4}=1$$

Zapisujemy $\sin(\pi/4)=\cos(\pi/4)=\sqrt{2}/2$ i mnożymy obie strony przez $2/\sqrt{2}$. Upraszczamy wyrazy podobne.

$$2\sin x-2\cos x=\sqrt{2}$$

Używamy wzoru na różnicę sinusa i kosinusa tego samego kąta. Jeszcze dzielimy obie strony przez 2. W tablicach można znaleźć wzór na $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\,\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$. Zauważ, że $\cos x=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$. Postawiamy $\alpha=x$ oraz $\beta=\frac{\pi}{2}-x$ i dostajemy:

$$2\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\,\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

czyli

$$\cos\frac{\pi}{4}\,\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ponownie podstawiamy $\cos(\pi/4)=\sqrt{2}/2$, skracamy co się da i mamy :

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

Rozwiązaniami tego równania są: $x_1-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ oraz $x_2-\frac{\pi}{4}=\frac{11\pi}{6}+2k\pi$ czyli w podanym w zadaniu przedziale mamy dwa rozwiązania:

$x_1=\frac{5\pi}{12}$; $x_2=\frac{13\pi}{12}$.

Zadanie 10. (plik 22.jpg)

Wyznacz liczby rzeczywiste spełniające równanie $2\sin^2 x-\cos 2x=1$. Oblicz sumę rozwiązań tego równania leżących w przedziale $<0;32\pi>$

Rozwijamy kosinus podwojonego kąta i mamy:

$$2\sin^2 x-(\cos^2 x-\sin^2 x)=2\sin^2 x-1+\sin^2 x+\sin^2 x=4\sin^2 x-1=1 \quad \text{zatem}$$

$$\sin^2 x=\frac{1}{2} \quad \text{zatem} \quad \sin x=+\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{lub} \quad \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Daje to cztery rozwiązania: $x_1=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi$; $x_2=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$; $x_3=\frac{\pi}{4}+2k\pi$; $x_4=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$
Te rozwiązania można krócej zapisać jako $x=\pi/4+k\pi/2$. W przedziale $<0;32\pi>$ najmniejsze rozwiązanie to $\pi/4$, a największe to $127\pi/4$. Razem jest więc $(127-1)/2+1=64$ rozwiązania, tworzące ciąg arytmetyczny. Suma tego ciągu wynosi $64*(127+1)\pi/8=1024\,\pi$.

Zadanie 12. (plik 23.jpg)

Rozwiąż $\dfrac{6\sin 2x}{\operatorname{tg} x} + 5\cos x = 4\cos^4 x + \cos(2x)\ \cos x$ dla $x \in (-2\pi; 2\pi)$

Zakładamy, że tangens x nie jest zerem i istnieje. Rozpisujemy tangens i funkcje podwojonego kąta

$$\frac{12\sin x\ \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} + 5\cos x = 4\cos^4 x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\ \cos x$$

i dalej

$$12\cos^2 x + 5\cos x = 4\cos^4 x + \cos^3 x - \cos x + \cos^3 x$$

i dalej

$$4\cos^4 x + 2\cos^3 x - 12\cos^2 x - 6\cos x = 0$$

Ten wielomian daje się rozłożyć na czynniki (metodą prób i błędów, szukając po podzielnikach liczby 6) Otrzymujemy:

$$2cosx\ (2\cos x + 1)(cos^2 x - 3) = 0$$

Jednym z rozwiązań jest **cos x = 0** Ale oryginalne równanie zawiera funkcję tangens która **nie istnieje** gdy kosinus się zeruje. Dlatego powinniśmy **odrzucić** to rozwiązanie pomimo tego, że równanie jest spełnione.

Trzeci nawias prowadzi do sprzeczności, a zerowanie się środkowego nawiasu daje $\cos x = -1/2$ i następującą rodzinę rozwiązań:

$$x_1 = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \qquad \text{oraz} \qquad x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

W przedziale podanym w zadaniu mieszczą się następujące rozwiązania: $-\frac{4\pi}{3};\ -\frac{2\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3}$.

Pozdrowienia - Antek

W razie pytań pisz albo jak się pomyliłem proszę na priv.