Tekst na niebiesko to treść zadania lub mój komentarz.

Zadanie:

Ile wynosi wartość średnia prądu średniego płynącego przez diodę kiedy napięcie U wynosi $U(t) = 12\sqrt{2}\sin(2\pi \cdot 50t)$. Dane: $R = 10\,\Omega$ oraz $i = u/r$ dla $u > 0$

Są dwa określenia "średniego prądu" - jedno to "zwykła" średnia (jako pojęcie matematyczne), drugie to definicja używana przez elektryków, tzw. "natężenie skuteczne". Ponieważ nie wiem, o którą definicję Ci chodzi, policzymy to średnie natężenie na oba sposoby.

Wygodniej będzie posługiwać się wzorami, nie podstawiając na razie danych z zadania. Zapiszmy wzór na zależność napięcia od czasu w taki sposób:

$$U(t) = U_0 \sin(2\pi f t) \tag{1}$$

gdzie w tym zadaniu:
$U_0 = 12\sqrt{2}\,\text{V}$ - amplituda napięcia, mam nadzieję, że w woltach,
$f = 50\,\text{Hz}$ - częstotliwość sinusoidy (to NIE jest częstość kołowa ω).

Zauważ, że przy takich oznaczeniach gdy czas $T = 1/f$ to wewnątrz funkcji sinus zostaje 2π i T jest okresem tej funkcji (czyli $U(0) = U(T) = U(2T) = ...$)

Dioda puszcza prąd zmienny tylko w jednym kierunku. Załóżmy, że jest to idealna dioda i gdy przewodzi, nie stawia oporu - jest zwarciem w obwodzie, a gdy nie przewodzi traktujemy ją jako przerwę. Wtedy zależność prądu od czasu w ciągu **pierwszego** okresu można opisać wzorem:

$$J(t) = \begin{cases} \dfrac{U_0}{R}\sin(2\pi f t) & \text{dla} \quad t \in \left\langle 0; \dfrac{T}{2} \right\rangle \\ \\ 0 & \text{dla} \quad t \in \left(\dfrac{T}{2}; T \right) \end{cases} \tag{2}$$

(Oznaczam natężenie przez J, aby się nie myliło z małą literą "l" lub cyfrą "1")

Metoda "matematyczna" (czyli zwykła średnia). Oznaczmy szukaną średnią przez $\bar{J}$. Jest ona równa całce z funkcji $J(t)$ po **całym** okresie sinusa dzielonej przez długość okresu T.

$$\bar{J} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T J(t)\,dt$$

Natężenie $J(t)$ jest określane wzorem (2), wobec tego całkowanie wystarczy przeprowadzić tylko od $t = 0$ do $t = T/2$, bo w drugiej połowie okresu ta całka jest zerem. Zapisujemy więc wzór na średnią w taki sposób:

$$\bar{J} = \frac{1}{T}\int\limits_0^{T/2} \frac{U_0}{R}\sin(2\pi f t)\,dt = \frac{U_0}{TR}\,\frac{1}{2\pi f}\,\left|-\cos(2\pi f t)\right|_0^{T/2} = \frac{1}{\pi}\,\frac{U_0}{R}$$

gdzie w całce podstawiamy $x = 2\pi f t$, więc $dt = dx/(2\pi f t)$ - stąd to wyrażenie w mianowniku, następnie uwzględniamy fakt, że $f = 1/T$.

Podstawiamy dane z zadania:

$$\bar{J} = \frac{1}{\pi}\,\frac{12\sqrt{2}}{10} = \frac{6\sqrt{2}}{5\pi}\,\text{A} \approx 0{,}54\,\text{A}$$

---

ciąg dalszy na następnej stronie

Metoda natężenia skutecznego. Dla odmiany oznaczmy tą średnią przez J_{sk}
To pojęcie jest wzięte z elektrotechniki, gdzie często trzeba liczyć rzeczywistą pracę (np. ciepło wydzielane) na odbiorniku o oporze R. Jeśli prąd nie jest przesunięty w fazie względem napięcia to chwilowa moc $P = RJ^2$. Policzymy najpierw energię E wydzielaną na oporniku R w czasie jednego okresu T. Jest ona równa całce z mocy chwilowej po czasie czyli:

$$E = \int_0^T RJ^2(t)\,dt$$

Podstawiamy $J(t)$ ze wzoru (2), co pozwala ograniczyć całkowanie do przedziału $(0; T/2)$. Dostajemy:

$$E = \int_0^{T/2} R\,\frac{U_0^2}{R^2}\,\sin^2(2\pi ft)\,dt = \frac{U_0^2}{R}\,\frac{1}{2\pi f}\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$$

gdzie jak poprzednio podstawiamy $x = 2\pi ft$, stąd $1/(2\pi f)$ przed całką. Jest "sprytny" graficzny sposób policzenia całki z kwadratu sinusa po połowie okresu, ale nie chce mi się rysować, więc po prostu zamieńmy: $\sin^2 x = (1-\cos(2x))/2$ i mamy:

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos(2x))\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\left|-\sin(2x)\right|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Wstawiamy wynik do wyrażenia na E. Podstawiamy f = 1/T.

$$E = \frac{U_0^2}{R}\,\frac{1}{2\pi f}\,\frac{\pi}{2} = \frac{U_0^2}{R}\,\frac{T}{4} \tag{3}$$

We wzorze (3) mamy wyrażenie na **energię** w ciągu jednego okresu. Dzielimy ją przez T i otrzymujemy średnią moc skuteczną P_{sk}. Następnie zapisujemy tę moc jako RJ_{sk}^2

$$P_{sk} = \frac{E}{T} = \frac{U_0^2}{4R} = RJ_{sk}^2 \quad \text{zatem} \quad J_{sk} = \sqrt{\frac{U_0^2}{4R^2}} = \frac{U_0}{2R}$$

Podstawiamy dane z zadania:

$$J_{sk} = \frac{12\sqrt{2}}{2\cdot 10} = \frac{3\sqrt{2}}{5}\,\mathrm{A} \approx 0{,}85\,\mathrm{A}$$

Jak widać druga metoda daje inną (większą) wartość średniego prądu. O ile pierwsza metoda jest poprawna matematycznie jeśli chodzi o obliczanie średniej z funkcji, to druga metoda ma zastosowanie praktyczne, gdyż, jak pisałem, wiąże się z energią, czyli np. ilością ciepła wydzielaną w obwodzie. Nawiasem mówiąc - gdyby nie było diody, to mielibyśmy $P_{sk} = U_0^2/(2R)$, co daje $J_{sk} = J_0/sqrt2$, gdzie J_0 jest maksymalnym natężeniem prądu. Pamiętasz taki wzór ze średniej szkoły ?

W razie pytań pisz proszę na priv.

Pozdrowienia - Antek