Zadanie 1.

$$P = \iint_D x^2(y-x)\,dxdy \qquad \text{gdzie} \qquad D:\ x^2 < y < \sqrt{x}$$

Dzielimy obszar D na pionowe paski o szerokości dx, zaczynające się od krzywej $y = x^2$, kończące na krzywej $y = \sqrt{x}$. Najpierw wykonujemy całkowanie po y jak niżej, następnie po x w granicach od $x_1 = 0$ do $x_2 = 1$ (są to punkty przecięcia linii ograniczających obszar D).

$$P = \iint_D x^2(y-x)\,dxdy = \int_0^2 x^2\left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(y-x)\,dy\right]dx = \int_0^2\left(x^2\left[\frac{y^2}{2} - xy\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}\right)dx$$

Podstawiamy granice całkowania do wyrażenia po prawej stronie powyżej i liczymy całkę po x

$$P = \int_0^2\left(-\frac{x^6}{2} + x^5 - x^{7/2} + \frac{x^3}{2}\right)dx = \left[-\frac{x^7}{14} + \frac{x^6}{6} - \frac{4x^{9/2}}{18} + \frac{x^4}{8}\right]_0^1 = -\frac{1}{504}$$

Zadanie 2.

Obliczyć pole obszaru ograniczonego liniami: $y = e^x$; $y = e^{2x}$; $x = 1$.

Wykresy e^x oraz e^{2x} przecinają się w punkcie $x = 0$, następnie linia e^{2x} leży nad linią e^x. W tym obszarze całkujemy aż do pionowej prostej $x = 1$. Wykonujemy więc całkę:

$$P = \int_0^1\left[\int_{e^x}^{e^{2x}} 1\,dy\right]dx = \int_0^1\left(e^{2x} - e^x\right)dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - e^x\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e+1)^2$$

Wynik ładnie "zwija się" w pełny kwadrat.

Zadanie 3.

Oblicz, stosując różniczkę zupełną, wartość przybliżoną wyrażenia: $\ln\left(\sqrt{1{,}02} - \sqrt[3]{0{,}97} + 1\right)$

Traktujemy to wyrażenie jako funkcję dwóch zmiennych $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{y} + 1\right)$ i liczymy wartość tej funkcji w punkcie $x_0 = 1$; $y_0 = 1$ czyli $f(1,1) = \ln(1-1+1) = 0$. Następnie przyjmujemy $\Delta x = 0{,}02$ i $\Delta y = -0{,}03$ i obliczamy Δf jak niżej:

$$\Delta f = \left[\Delta x\,\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{x_0,y_0} + \left[\Delta y\,\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{x_0,y_0} = \frac{1}{\sqrt{x_0} - \sqrt[3]{y_0} + 1}\left(\frac{\Delta x}{2\sqrt{x_0}} - \frac{\Delta y}{3\sqrt[3]{y_0^2}}\right) = 0,02$$

Przybliżona wartość wyrażenia wynosi $0 + 0{,}02 = 0{,}02$. Przy pomocy kalkulatora dostajemy około 0,01985, czyli błąd przybliżenia to zaledwie około 0,7%.

---

ciąg dalszy na następnej stronie

Zadanie 4.

Wyznacz ekstrema funkcji $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 48x$

Znajdujemy najpierw pierwsze pochodne f(x,y) i porównujemy je do zera.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6y - 48 = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -6x + 2y = 0$$

Z drugiego równania mamy $y = 3x$, podstawiamy to do pierwszego równania i rozwiązujemy równanie kwadratowe $3x^2 - 18x - 48 = 0$, co daje $x_1 = -2$; $x_2 = 8$ i mamy dwa punkty podejrzane o bycie ekstremum: **(–2; –6)** oraz **(8; 24)**.

Liczymy drugie pochodne:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

Tworzymy macierz drugich pochodnych i podstawiamy współrzędne podejrzanych punktów. Obliczamy dwa poniższe wyznaczniki (w pierwszym mamy podstawione x = –2; y = –6, w drugim x = 8; y = 24).

$$\det \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} = -60 \qquad \det \begin{bmatrix} 48 & -6 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} = 60$$

W punkcie **(8; 24)** wyznacznik macierzy drugich pochodnych jest dodatni i $\partial^2 f / \partial x^2 > 0$, w tym punkcie jest więc **minimum lokalne** równe f(8,24) = –448.

Zadanie 5.

Wyznaczyć współrzędne punktu przecięcia prostej $(x - 12)/4 = (y - 9)/3 = (z - 1)/1$ z płaszczyzną $3x + 5y - z - 2 = 0$

Zadanie sprowadza się do rozwiązania układu trzech równań liniowych z trzema niewiadomymi. Dwa równania dostajemy z zapisu prostej (po pomnożeniu go przez 12, aby uniknąć ułamków), trzecim równaniem jest równanie płaszczyzny.

$$\begin{cases} 3x - 36 = 4y - 36 \\ y - 9 = 3z - 3 \\ 3x + 5y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

Z pierwszych dwóch równań wyliczamy “x” oraz “z” w zależności od “y”, wstawiamy do trzeciego równania i dostajemy punkt: **(0; 0; -2)**.

W razie pytań albo jak się pomyliłem pisz proszę na priv.