

Zadanie 1.

Obszar całkowania D jest ograniczony od dołu parabolą $y = x^2 - 2x$ i od góry prostą $y = x$ (zrób sobie proszę rysunek, to zobaczysz). Te linie przecinają się w punktach w których x spełnia równanie:

$$x^2 - 2x = x$$

czyli w $x_1 = 0$ oraz $x_2 = 3$. Dzielimy obszar D na wąskie pionowe paski o szerokości dx . Pole dP jednego takiego paska wyznacza całka:

$$dP = \int_{x^2-x}^x f(x, y) dy$$

Całe pole wymaga całkowania dP po x czyli całka iterowana ma postać:

$$P = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^3 \left(\int_{x^2-x}^x f(x, y) dy \right) dx$$

Zadanie 2.

Narysuj proszę podany w zadaniu trójkąt. Bok BC jest poziomy i wygodnie jest podzielić obszar D na poziome paski ograniczone z lewej strony prostą AB o równaniu $x = y$ i z prawej strony prostą o równaniu $x = 2y$. Pole dP jednego paska wynosi:

$$dP = \int_y^{2y} (6x + 2y) dx$$

(mam nadzieję, że na zdjęciu są nawiasy, a nie pionowe kreski, a zresztą to wszystko jedno, bo x, y są dodatnie w obszarze D). Liczymy tą całkę:

$$dP = \left| 3x^2 + 2xy \right|_y^{2y} = (12y^2 + 4y^2) - (3y^2 + 2y^2) = 11y^2$$

Aby mieć całe pole całkujemy po y w granicach od A (czyli od $y = 0$) do linii BC (czyli do $y = 2$)

$$P = \int_0^2 11y^2 dy = \frac{11}{3} y^3 \Big|_0^2 = \frac{88}{3} = 29\frac{1}{3}$$

Zadanie 3.

Przenosimy $x^2 + 1$ na prawą stronę, dzielimy obie strony przez $x^2 + 1$ i mamy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^3}{x^2 + 1}$$

Rozdzielamy zmienne. Dzielimy obie strony przez y^3 i mnożymy przez dx . Całkujemy:

$$\int \frac{1}{y^3} dy = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

W całce z prawej strony podstawiamy $t = x^2 + 1$, wtedy $dt = 2x dx$ i ta całka to $\ln t$ czyli $\ln(x^2 + 1)$. Mamy rozwiązanie:

$$-\frac{1}{2y^2} = \ln(x^2 + 1) + C$$

Warunek brzegowy to $y(0) = 3$. Podstawienie $x = 0$ zeruje logarytm i dostajemy $C = -1/18$.

Wobec tego mamy rozwiązanie ze znakiem $+$ (gdy przyjmujemy $+$ dla pierwiastka)

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{-2 \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{9}}}$$
