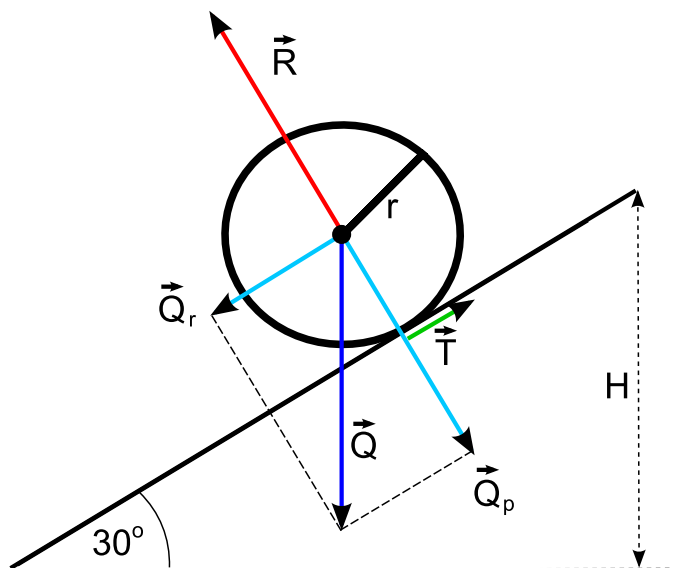


Rozkład sił na rysunku obok. To czarne “r” to tylko promień (kuli, obręczy?) która się toczy. Wyrzucić go jak nieładne.

Siła ciężkości $\vec{Q}$ (niebieska) rozkłada się na (błękitne) składowe:

$\vec{Q}_p$ prostopadłą do równi, równoważoną przez siłę reakcji $\vec{R}$ (czerwona). Ta siła powoduje tarcie (zielone $\vec{T}$)

$\vec{Q}_r$ równoległą do równi. Nadaje ciału przyspieszenie po odjęciu $\vec{T}$. Zauważ, że gdyby $Q_r = T$ to ciało by się “przykleiło”.



Taki niebieski tekst to komentarze, NIE są częścią rozwiązania.

Punkt (a) masz objaśniony powyżej. W treści zadania istotne są słowa:

“bez poślizgu”

Oznacza to, że prędkość liniowa v , prędkość kątowa ω , przyspieszenie liniowe “a” przyspieszenie kątowe ε i promień r są związane

$$v = \omega r \quad \text{oraz} \quad a = \varepsilon r \quad (1)$$

Proszę zwrócić uwagę na ten tekst “bez poślizgu”. Zauważ, że gdyby równia była z idealnego teflonu to brak jest tarcia i to okrągłe **nie obraca się**. Nie może, bo byłby brak siły $\vec{T}$. Zauważ też, że “zaczepiłem” siły $\vec{Q}$ i $\vec{R}$ w środku ciężkości bryły, a siłę $\vec{T}$ na obwodzie. Co do siły $\vec{R}$ to piszę od razu, że jest prostopadła do równi, znosi się z $\vec{Q}_p$ i nie ma wpływu na ruch tego ciała, można równie dobrze narysować ją z punktu styku kulki z równią (jak nauczyciel tak chce, to przesunąć czerwony $\vec{R}$)

Jeszcze możesz się zapytać: “a dlaczego zaczepiłem siłę ciężkości w środku obręczy (lub kuli). Na logikę: “a niby dlaczego gdzie indziej?” To jest symetryczna bryła więc jej środek masy jest w geometrycznym środku. Matematycznie - jeśli chcesz, matma jest tu trochę poza liceum, ale spróbuję dowodu “na palcach” - to napisz do mnie na:

antek@upcpoczta.pl [“przemyszkuj” ten adres, nie chce mi się robić “aktywnego” PDF]

Możemy napisać na podstawie II zasady dynamiki dwa równania. Jedno na przyspieszenie liniowe a . Przez m oznaczamy masę, przez g - przyspieszenie ziemskie. Kąt $\alpha = 30^\circ$, jest to zarówno kąt nachylenia równi jak i kąt między wektorami $\vec{Q}_p$ i $\vec{Q}$ (bo oba kąty mają ramiona wzajemnie prostopadłe). Pod działaniem wypadkowej sił $\vec{Q}_r$ i T ciało porusza się w dół równi.

$$ma = Q_r - T = mg \sin \alpha - T \quad (2)$$

Drugie równanie jest na ruch obrotowy. Siła tarcia jest **jedyną** siłą powodującą obrót ciała. Oznaczamy przez I moment bezwładności (pełni on rolę masy dla ruchu obrotowego, natomiast iloczyn $T \cdot r$ jest momentem siły i pełni rolę siły).

$$I \varepsilon = T r \quad (3)$$

Z równania (1) wyznaczamy $\varepsilon = a/r$, wstawiamy je do równania (3), wyznaczamy z niego T i wstawiamy do równania (2). Dostajemy:

$$ma = mg \sin \alpha - \frac{I}{r^2} a \quad (4)$$

Z powyższego równania obliczamy przyspieszenie:

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}} \quad (5)$$

Gdy mamy przyspieszenie łatwo obliczamy prędkość v i czas ruchu t . Zauważ, że ciało przebywa drogę s równą długości równi czyli $s = H / \sin \alpha$. Ze wzoru na ruch jednostajnie przyspieszony bez prędkości początkowej otrzymujemy:

$$\frac{H}{\sin \alpha} = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{zatem} \quad t = \sqrt{\frac{2H}{a \sin \alpha}} \quad (6)$$

Wstawiamy do ostatniego równania przyspieszenie z równania (5)

$$t = \sqrt{\frac{\frac{2H}{\frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}} \sin \alpha}}{\frac{2H \left(m + \frac{I}{r^2}\right)}{mg \sin^2 \alpha}}} = \sqrt{\frac{2H \left(m + \frac{I}{r^2}\right)}{mg \sin^2 \alpha}} \quad (7)$$

Prędkość v na dole równi dostajemy jako iloczyn $v = at$ czyli

$$v = a \sqrt{\frac{2H}{a \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2Ha}{\sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2H \frac{mg \sin \alpha}{m + \frac{I}{r^2}}}{\sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2Hmg}{m + \frac{I}{r^2}}} \quad (8)$$

Do tego momentu unikaliśmy pisania o tym co się stacza - obręcz czy kula. Teraz czas wpisać właściwe momenty bezwładności. Po lewej jest rozwiązanie dla obręczy, po prawej dla kuli.

$$\begin{array}{ll} I_{\text{obreczy}} = mr^2 & I_{\text{kuli}} = \frac{2}{5}mr^2 \\ t_{\text{obreczy}} = \sqrt{\frac{2H \left(m + \frac{mr^2}{r^2}\right)}{mg \sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{4H}{g \sin^2 \alpha}} & t_{\text{kuli}} = \sqrt{\frac{2H \left(m + \frac{2}{5} \frac{mr^2}{r^2}\right)}{mg \sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{14}{5} \frac{H}{g \sin^2 \alpha}} \\ v_{\text{obreczy}} = \sqrt{\frac{2Hmg}{m + \frac{mr^2}{r^2}}} = \sqrt{Hg} & v_{\text{kuli}} = \sqrt{\frac{2Hmg}{m + \frac{2}{5} \frac{mr^2}{r^2}}} = \sqrt{\frac{10}{7} Hg} \end{array}$$

Sprawdźmy wymiary: $[t] = \sqrt{\frac{m}{m/s^2}} = \sqrt{s^2} = s$ oraz $[v] = \sqrt{m \cdot m/s^2} = m/s$.

Nie wstawiam danych, bo nie wiem których ze wzorów powyżej użyć, czy jest to obręcz, czy kula. Jak będziesz wiedzieć to umiesz użyć kalkulatora... Zwróć jeszcze proszę uwagę na wzory powyżej. We wzorze (7) czas staczania się zależy od kąta nachylenia równi i zgodnie z logiką staje się niekończony dla płaskiej równi. Natomiast prędkość (wzór 8) nie zależy od kąta, choć pojawia się on w trakcie wyprowadzenia. Jest tak dlatego że końcowa prędkość zależy od energii potencjalnej ciała na szczycie równi, nie jest ważne, czy ciało stacza się wolniej czy szybciej. Zwróć też uwagę, że wielkości czasu i prędkości podczas toczenia się są mniejsze niż gdyby ciałem był klocek jadący bez tarcia (dla którego $I = 0$). Jest tak ponieważ część energii potencjalnej idzie na ruch obrotowy, część na postępowy, w przypadku obręczy energie te dzielą się wręcz po połowie, dla klocka wynikiem na prędkość byłby $\sqrt{2Hg}$, a czas spadania swobodnego to $\sqrt{2H/g}$.

Mam nadzieję, że się nie pomyliłem...

Pozdrowienia - Antek