Tekst na niebiesko jest komentarzem lub treścią zadania.

Zadanie 2.

Rozwiązać w zależności od parametru a $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}$

Zapiszmy ten układ równań w postaci macierzowej: $A\overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$

$$A\overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{\mathbf{b}} \quad \text{zatem} \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Jak Werner pisał w komentarzu jest to "klasyczny" układ równań Cramera, wałkowany w sieci wielokrotnie. Ale zróbmy go, bo metoda może Ci się przydać.

Twierdzenie Cramera (było na wykładzie, prawda?) mówi, że:

- Jeśli wyznacznik $\det A \neq 0$ to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie
- Gdy $\det A = 0$ to układ jest albo **nieoznaczony** (nieskończenie wiele rozwiązań), albo **sprzeczny** (zero rozwiązań)

Obliczamy wyznacznik macierzy A

$$W(a) = \det A = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2 = (a+2)(a-1)^2$$

(Na końcu zadania wyjaśniam, jak dojść do powyższego rozkładu wielomianu $W(a) = a^3 - 3a + 2$ na czynniki). Jak widać układ nie ma rozwiązania jednie gdy a = 1 lub a = –2.

Gdy a = 1 wszystkie równania są identyczne i układ jest nieoznaczony - ma nieskończenie wiele rozwiązań leżących na płaszczyźnie $x + y + z = 1$.

Gdy a = -2 sumujemy równania stronami. Po lewej stronie wychodzi 0, po prawej stronie $1 - 2 + 4 = 3$. Dostajemy sprzeczność, czyli układ jest sprzeczny - ma zero rozwiązań.

Gdy $a \in R \backslash \{-2;\ 1\}$ układ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Rozwiązaniami są umiesz to zrobić, prawda ?

$$x = -\frac{a+1}{a+2} \qquad y = \frac{1}{a+2} \qquad z = \frac{a^2+2a+1}{a+2}$$

To jest koniec rozwiązania zadania.

Na następnej stronie są uwagi nie należące do rozwiązania ale może Ci się przydadzą.

Uwagi:
Widać dlaczego nie może być a = –2, bo wtedy otrzymujemy zero w mianownikach wyrażeń na x, y, z. Dla a = 1 otrzymujemy punkt (–2/3; 1/3; 4/3). Ten punkt leży na płaszczyźnie $x + y + z = 1$ i jest jednym z nieskończonej ilości punktów tej płaszczyzny, będących wtedy rozwiązaniami.

Zinterpretujmy kład sprzeczny. Wstawmy a = –2 i przenieśmy "z" na prawo, traktując je jako parametr:

$$\begin{cases} -2x + y = 1 - z \\ x - 2y = -2 - z \\ x + y = 4 + 2z \end{cases} \tag{2}$$

Weźmy dwa pierwsze równania. mają one jednoznaczne rozwiązanie:

$$x(z) = z \qquad y(z) = z + 1$$

Na dowolnie wybranej płaszczyźnie równoległej do XY jest punkt będący rozwiązaniem dwóch pierwszych równań układu (1). Np, gdy z = 0 jest to punkt (0;1;0). Punkty te leżą na prostej - faktycznie, jeśli zapiszemy: $(x; y; z) = (0; 1; 0) + z[1; 1; 0]$ otrzymujemy parametryczne równanie prostej w 3D. Ma to sens, bo płaszczyzny opisywane dwoma pierwszymi równaniami (1) nie są równoległe, więc przecinają się wzdłuż prostej.
Trzecie z równań (1) też opisuje płaszczyznę. Jest to jednak płaszczyzna **równoległa** do napisanej wyżej prostej i nigdy jej nie przetnie. Dlatego układ jest sprzeczny. Zobaczmy co dzieje się na dowolnej płaszczyźnie równoległej do XY. Płaszczyzna opisana trzecim z równań (1) przecina tą równoległą płaszczyznę po prostej, np płaszczyznę XY przcina po prostej $x+y = 4$. Tymczasem punkt (0;1;0) **nie należy** do tej prostej. Tak jest na każdej innej płaszczyźnie: Wstawmy x(z), y(z) do trzeciego z równań (1)

$$z + (z + 1) = 2z + 4$$

Dostajemy sprzeczność która dowodzi że opisana parametrycznie prosta i płaszczyzna z trzeciego równania nie mają wspólnych punktów, więc ta prosta jest równoległa do płaszczyzny.

Rozwiązanie równania $W(a) = a^3 - 3a + 2 = 0$. Jedno z rozwiązań $a_1 = 1$ narzuca się od razu. Zapisujemy W(a) jako: $W(a) = (a - 1)(a^2 + Ba - 2)$. Ten wyraz wolny "–2" musi być taki, aby mnożony przez –1 dał 2 w początkowym równaniu. Podobnie przy a^2 ma być 1, aby powstało a^3. Wymnażamy i porównujemy współczynniki przy jednakowych potęgach "a".

$$a^3 - 3a + 2 = a^3 + a^2(B - 1) - a(B + 2) + 2 \quad \text{zatem} \quad B = 1$$

Jednoznacznie wynika z tego postać $W(x) = (a - 1)(a^2 + a - 2)$. Drugi nawias ma pierwiastki 1 i –2, stąd wziął się zapis: $W(a) = (a - 1)^2(a + 2)$

W razie pytań albo jak się pomyliłem pisz proszę na priv.
Pozdrowienia - Antek