

Małe kulki umocowano w wierzchołkach kwadratu o boku $a = 1\text{ m}$ i wprowadzono na nie ładunki każdy po $Q = 1\text{ }\mu\text{C}$ 2 z nich są dodatnie 2 ujemne. Ładunki dodatnie leżą na jednym boku.

(a) Narysuj wektory natężeń pola i oblicz ich wartości w punktach A,B,C leżących na środkach boków kwadratu.

(b) Oblicz potencjały w punktach A,B,C

(c) Oblicz i porównaj prace, jakie trzeba wykonać aby ładunek punktowy $q = 10^{-7}\text{ C}$ przesunąć z punktu A do B i z punktu B do C.

Dane:

$a = 1\text{ m}$ - bok kwadratu

$Q = 1\text{ }\mu\text{C}$ - wartość ładunku

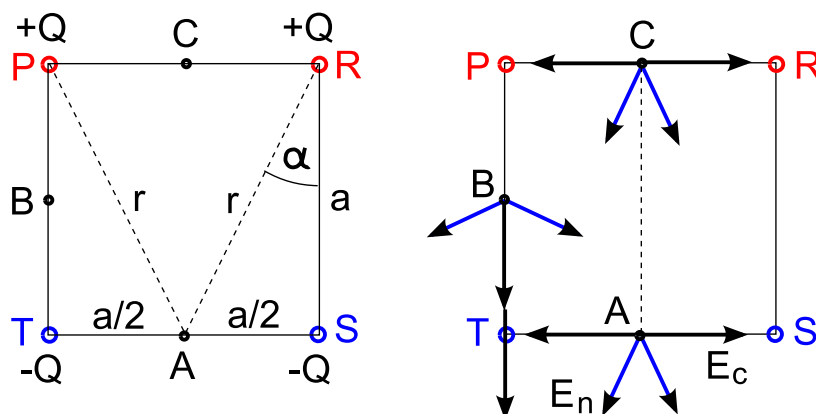
$q = 10^{-7}\text{ C}$ - ładunek próbny

Szukane:

Wektory pola $\vec{E}$

Potencjały V

Prace W



W zadaniu pojawi się kilka charakterystycznych wielkości, które objaśniam na rysunku po lewej stronie. Odległość r od środka boku kwadratu do przeciwległego wierzchołka wynosi z twierdzenia Pitagorasa:

$$r = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{oraz} \quad r^2 = \frac{5}{4} a^2 \quad (1)$$

Do obliczania składowych wektorów natężenia pola będzie potrzebny sinus i kosinus kąta α (zaznaczonego jako kąt ARS). Z rysunku wynika, że

$$\sin \alpha = \frac{a/2}{r} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{oraz} \quad \cos \alpha = \frac{a}{r} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (2)$$

Część a.

Wektory natężeń pola zaznaczone są na rysunku po prawej stronie. Występują jedynie dwie wartości natężenia: Narysowane na czarno wektory oznaczane E_c mają wartość odpowiadającą natężeniu w odległości $\frac{a}{2}$ od ładunku Q , narysowane na niebiesko wektory E_n mają wartość odpowiadającą natężeniu w odległości r od ładunku Q . Wyliczam te wartości:

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(a/2)^2} = \frac{Q}{\pi\epsilon_0 a^2} \\ E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{5\pi\epsilon_0 a^2} \end{cases} \quad (3)$$

W drugim z równań (2) podstawilem r^2 z równania (1).

Zaczynam od punktu A. Natężenie pola $\vec{E}_A$ jest wektorową sumą natężeń od ładunku w punkcie T (czarny wektor w **lewą** stronę), ładunku w S (czarny wektor w **prawą** stronę) oraz dwóch niebieskich wektorów od ładunków w punktach P i R. Czarne wektory się znoszą, podobnie jak poziome składowe niebieskich, zostają pionowe składowe niebieskich o wartościach równych $E_n \cos \alpha$. Zatem wartość pionowego, skierowanego w dół wektora $\vec{E}_A$ wynosi:

$$E_A = 2 E_n \cos \alpha = 2 \cdot \frac{Q}{5\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2Q}{\pi\epsilon_0 a^2} \frac{2}{5\sqrt{5}} \quad (4)$$

Specjalnie zapisałem wynik w (4) w takiej postaci bo pierwszy z ułamków pojawi się także poniżej i będzie łatwiej liczyć.

W punkcie C sytuacja jest analogiczna, więc $E_C = E_A$. Należy tylko pamiętać, że czarny wektor zwrócony w lewo pochodzi od ładunku w R, a wektor zwrócony w prawo od ładunku w P.

Czytelnika proszę o ewentualne przerysowanie obrazka z poprzedniej strony do analizy natężenia pola w punkcie B. W tym punkcie czarne wektory od ładunków w punktach P i T dodają się, natomiast składowe poziome niebieskich wektorów od R i S się znoszą, a pionowe dodają. Składowe pionowe niebieskich wektorów mają wartości $E_n \sin \alpha$, całkowity skierowany pionowo w dół wektor $\vec{E}_B$ ma więc wartość:

$$E_B = 2 E_c + 2 E_n \sin \alpha = 2 \cdot \frac{Q}{\pi \epsilon_0 a^2} + 2 \cdot \frac{Q}{5\pi \epsilon_0 a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2Q}{\pi \epsilon_0 a^2} \left(1 + \frac{1}{5\sqrt{5}} \right) \quad (5)$$

Teraz się wyjaśnia, dlaczego wzory (4,5) zapisałem jak wyżej. Wystarczy raz obliczyć powtarzający się w nich czynnik. Najpierw sprawdzam wymiar tego czynnika. Z tablic znajduję wartość przenikalności dielektrycznej próżni ϵ_0 .

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \quad [E] = \frac{C}{\frac{C^2}{N \cdot m^2} \cdot m^2} = \frac{N}{C} \quad (6)$$

To jest poprawny wymiar, ponieważ natężenie pola elektrostatycznego mnożone przez ładunek ma dawać siłę w niutonach. Podstawiam dane z zadania. Zamieniam $1 \mu C$ na $10^{-6} C$ i obliczam ułamek wspólny dla obu natężeń:

$$\frac{2Q}{\pi \epsilon_0 a^2} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1^2} \approx 72000 \quad (7)$$

Teraz wartości natężeń ze wzorów (4) i (5)

$$\begin{cases} E_A = E_C = 72000 \cdot \frac{2}{5\sqrt{5}} \approx 12000 \\ E_B = 72000 \cdot \left(1 + \frac{1}{5\sqrt{5}} \right) \approx 78500 \end{cases} \quad (8)$$

Obie wartości natężeń są wyrażone w N/C. Kierunki i zwroty wektorów natężeń są wszystkie jednakowe: pionowo w dół w sensie rysunku na poprzedniej stronie.

Część b.

Liczenie potencjałów będzie prostsze gdyż dodają się one skalarnie.

W punkcie B potencjały od ładunków w P i T oraz w R i S znoszą się, gdyż odległości są równe, a znaki ładunków przeciwne. Wobec tego $V_B = 0$.

Wartości potencjałów w punktach A i C są jednakowe, ale znaki przeciwne, przy czym potencjał w punkcie C z powodu bliskości ładunków dodatnich będzie dodatni. Obliczam go. Jest to suma dwóch jednakowych potencjałów od ładunków Q w P i R (w odległości $a/2$) **minus** suma potencjałów od punktów T i S (w odległości r). Dostaję w punkcie C:

$$V_C = 2 \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{a/2} - 2 \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{r} = \frac{Q}{\pi \epsilon_0 a} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \quad (9)$$

Podstawiłem r z równania (1). Specjalnie przedstawiłem wzór (9) jak wyżej gdyż wykorzystam w obliczeniach wynik (7) zauważając, że $a = 1$. Wobec tego cały ułamek ma wartość 36000. Ale wymiar [V] będzie inny. Sprawdzam ten wymiar. Różnica między wymiarem w wyrażeniu (6) i obecnym polega jedynie na pomnożeniu poprzedniego wymiaru przez metr. Czyli:

$$[V] = \frac{N}{C} \cdot m = \frac{J}{C} = V \quad (10)$$

To jest poprawny wymiar, gdyż różnica potencjałów mnożona przez ładunek daje pracę. Przy okazji widać, że natężenie pola elektrycznego można także wyrażać w V/m. Volt na metr jest tym samym co niuton na kulomb.

Obliczenia:

$$V_C = -V_A = 36000 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \approx 20000 \quad (11)$$

Czyli w punkcie B zadania mam odpowiedzi: $V_C = 20000 \text{ V}$; $V_B = 0 \text{ V}$; $V_A = -20000 \text{ V}$.

Część c.

Praca w polu elektrycznym jest równa iloczynowi ładunku i różnicy potencjałów. W sytuacji na rysunku, gdy punkt A ma najniższy potencjał praca przy przenoszeniu z A do B oraz z B do C będzie dodatnia. Ale Czytelnik zauważy, że w zadaniu **nie jest powiedziane** gdzie są punkty A,B,C więc wybrałem je dowolnie. Proszę więc traktować obliczenie pracy jako pokazanie metody.

Wartości bezwzględne potencjałów V_A i V_C są jednakowe, potencjał $V_B = 0$, więc prace W_{AB} oraz W_{BC} są takie same.

$$W_{AB} = W_{BC} = q(V_B - V_A) = q(V_C - V_B) \quad (12)$$

Wymiarem [W] są dzule. Podstawiam $q = 10^{-7} \text{ C}$ i potencjał 20000 V.

$$W_{AB} = W_{BC} = 10^{-7} \cdot 20000 = 0,002 \quad (13)$$

Obie prace są równe 0,002 J czyli 2 mJ. Praca przy przeniesieniu ładunku q z punktu A do C jest sumą obu prac czyli wynosi 4 mJ. Jeżeli z oryginalnym zadaniem punkty A,B,C są położone inaczej to metodą jest zawsze odjęcie potencjału początkowego punktu od potencjału punktu końcowego. Może się zdarzyć praca ujemna, np. przy przeniesieniu dodatniego ładunku z C do A. Nic dziwnego, dodatni ładunek sam chętnie przejdzie w pobliże ujemnych.

Mam nadzieję, że się nie pomyliłem.

Pozdrowienia - Antek