Zestaw zadań 1: Arytmetyka reszt.[1]

(1) Wykonać działania: $(6^2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 - 1) \cdot (5 \cdot 12 - 7)^{-1}$ w $\mathbb{Z}_{17}$ oraz w $\mathbb{Z}_{23}$.

(2) Obliczyć $\frac{1}{5}$ w $\mathbb{Z}_n$ dla $n = 6, 7, 8, 9, 11, 13$.

(3) Ułożyć tabelkę funkcji $x \mapsto x^{-1}$ w $\mathbb{Z}_{13}$

(4) Rozwiązać układ równań

(a) $\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 4x + 9y = 4 \end{cases}$ w $\mathbb{Z}_{13}$ i w $\mathbb{Z}_7$ (b) $\begin{cases} 5x + 4y = a \\ 4x + 3y = b \end{cases}$ w $\mathbb{Z}_{11}$ i w $\mathbb{Z}_5$.

(5) Podaj liczbę rozwiązań układu równań $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 9x + y = 7 \end{cases}$ w ciele $\mathbb{Z}_{11}$. To samo w $\mathbb{Z}_{13}$ i $\mathbb{Z}_{17}$.

(6) Sprawdzić, że połowa różnych od zera elementów ciała $\mathbb{Z}_{13}$ to kwadraty elementów $\mathbb{Z}_{13}$.

(7) Ułożyć tabelkę funkcji $x \mapsto x^2$ w $\mathbb{Z}_{11}$.

(8) Sprawdzić czy istnieją – i wyznaczyć, jeśli istnieją – pierwiastki kwadratowe z -1 w ciele $\mathbb{Z}_p$ dla $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13$.

(9) Rozwiązać równanie:

(a) $5x^2 + 5x + 1 = 0$ w $\mathbb{Z}_{11}$, (b) $x^2 + x + 3 = 0$ w $\mathbb{Z}_5$,

(c) $2x^2 + 2x + 2 = 0$ w $\mathbb{Z}_{13}$, (d) $2x^3 + 3x2 + x - 4 = 0$ w $\mathbb{Z}_7$.

(10) Dla jakich wartości parametru $m \in K$ równanie $mx^2+(2m+1)x+m-2$ ma dwa różne rozwiązania w ciele K

(a) gdy $K = \mathbb{Z}_{11}$? (b) gdy $K = \mathbb{Z}_{13}$?

[1]Idea systemu, w którym określone jest dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie pojawiała się w pracach E. Galois (ciała skończone) i B. Riemanna (ciała funkcji meromorficznych) - bez nazwy. Pojęcie ciała pojawiło się po raz pierwszy w pracach Richarda Dedekinda (1831 - 1916) pod nazwą "dziedzina wymierności". Wprowadzenie nazwy "ciało" należy przypisać Peterowi G. Lejeune-Dirichletowi i Dedekindowi.
Uwaga. Na świecie istnieją dwa systemy nazewnictwa: 1) po angielsku – field, po rosyjsku – polje, 2) po niemiecku – Körper, po francusku – corps. Jak widać, polska terminologia wzorowana jest na niemieckiej i francuskiej.