Tekst na niebiesko jest komentarzem i nie należy do rozwiązania zadań.

Zadanie 2.3.7

Ustalmy pojęcia: W zadaniu podany jest **ciężar** właściwy γ cieczy, (a nie jej **gęstość** właściwa). Rozumiem, że ciężar właściwy, mierzony w $\mathrm{N/m^3}$ to gęstość (wyrażana w $\mathrm{kg/m^3}$) mnożona przez przyspieszenie ziemskie. Wtedy na głębokości h pod powierzchnią cieczy panuje ciśnienie $p = \gamma h$, NIE mnożymy tego przez "g".
Przez "środek naporu" rozumiem taki punkt pokrywy, że jeśli przyłożymy do niego prostopadłą do pokrywy siłę równoważącą napór P to pokrywa nie będzie się obracać nawet gdyby mogła.

W zadaniu nie jest to powiedziane, ale zakładamy, że brzegi pokrywy są równoległe i prostopadłe do dna zbiornika. Dzielimy pokrywę na poziome cienkie paski o szerokości Δa. Długość każdego paska jest równa "a". Jego pole powierzchni wynosi ΔS.

Jeśli taki pasek znajduje się na głębokości h po powierzchnią cieczy to działa na niego siła parcia (= "napór hydrostatyczny") równa:

$$\Delta P = \gamma h \Delta S = \gamma h a \Delta a$$

Całkowity napór P jest sumą wkładów ΔP. Przechodzimy do granicy bardzo małych szerokości Δa i zastępujemy sumowanie całkowaniem. Przyrosty Δa zastępujemy przez "dh" bo ciśnienie zmienia się wraz z głębokością.

$$P = \int\limits_{(2/3)H-a/2}^{(2/3)H+a/2} \gamma h a \, dh = \frac{1}{2} \left[\gamma a h^2\right]_{(2/3)H-a/2}^{(2/3)H+a/2}$$

Granice całkowania biorą się stąd, że skoro środek pokrywy jest oddalony o 1/3 H od dna to leży on 2/3 H pod powierzchnią cieczy. Dolny brzeg pokrywy jest na głębokości (2/3)H + (a/2), a górny na głębokości (2/3)H - (a/2). Podstawiamy granice całkowania:

$$P = \frac{1}{2}\gamma a \left[((2/3)H - a/2)^2 - ((2/3)H - a/2)^2\right] = \frac{4}{3}\,\gamma\, a^2\, H$$

Wymiarem wyniku są niutony, bo γ ma wymiar $\mathrm{N/m^3}$, pozostałe wielkości trzeba podać w metrach.

Wyznaczymy położenie "środka naporu". Nazwijmy h_0 jego odległość od powierzchni cieczy, oczywiście ta odległość musi wypadać pomiędzy dolną i górną krawędzią pokrywy. Wąski pasek pokrywy leżący na głębokości h jest oddalony o $h - h_0$ od środka naporu. Zależnie od znaku tego wyrażenia **moment siły** wywołany parciem cieczy na dany pasek ma różny zwrot.

Suma momentów sił ma dawać zero - jest to warunek który musi być spełniony. Moment ΔK od jednego paska to $\Delta K = (h - h_0)\,\Delta P$. Przechodzimy do całkowania i porównujemy poniższą całkę do zera:

$$K = \int\limits_{(2/3)H-a/2}^{(2/3)H+a/2} (h - h_0)\gamma h a \, dh = \gamma\, a \left[\frac{h^3}{3} - \frac{h_0 h^2}{2}\right]_{(2/3)H-a/2}^{(2/3)H+a/2} = 0$$

Podstawiamy obie granice całkowania i dostajemy warunek (wybacz, że ominę upierdliwe liczenie, używam programu do obliczeń symbolicznych)

$$K = 0 = \gamma\, a^2 \left(\frac{2a^2}{3} + \frac{8H^2}{9} - \frac{4Hh_0}{3}\right) \qquad \text{zatem} \qquad h_0 = \frac{2}{3}\,H + \frac{a^2}{2H}$$

Wynik wygląda sensownie - h_0 zawsze wyjdzie większe od (2/3)H, czyli od położenia środka pokrywy. Prawidłowo, bo ciśnienie na dolne części pokrywy jest większe niż na górne więc zerowanie się momentów sił wymaga obniżenia środka naporu w stosunku do środka pokrywy.

Zadanie 2.3.7

Wydaje mi się, że ten "wydatek powietrza" to może być objętość albo masa powietrza wypływająca z przewodu w ciągu sekundy. Wystarczy policzyć objętość, bo masę dostaniemy mnożąc objętość razy gęstość. A objętość / czas policzymy jeśli poznamy prędkość wypływu powietrza.

Zastosujemy równanie Bernoulliego aby wykorzystać informacje o ciśnieniach w zwężce Venturiego i poza nią. Poza tym zastosujemy tzw. "równanie ciągłości". Mówi ono, że w czasie Δt **taka sama** objętość powietrza przepływa przez zwężkę i poza nią.

Oznaczmy przez v_1 prędkość powietrza poza zwężką, przez v_2 - wewnątrz niej. Przez S_1 i S_2 oznaczmy przekroje poza- i w zwężce. Wtedy iloczyn $v\Delta t$ jest odległością którą powietrze przebywa w czasie Δt, a iloczyn tej odległości i przekroju daje objętość. Prawo ciągłości zapiszemy tak:

$$S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t \quad \text{zatem} \quad D^2 v_1 = d^2 v_2$$

gdzie przekroje zastąpiłem ze wzoru $S_1 = D^2\pi/4$ itd. Mamy pierwszy związek miedzy prędkościami w zwężce i poza nią.

Drugi związek wynika z prawa Bernoulliego. Przewód jest poziomy, wtedy to prawo ma postać:

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const}$$

gdzie v - prędkość powietrza, p - ciśnienie, ρ - gęstość. To równanie dotyczy cieczy **nieściśliwych**, ale w zwężce powietrze tak właśnie się zachowuje (patrz Wikipedia "paradoks hydrodynamiczny"). Wobec tego mamy drugie równanie wiążące prędkości:

$$\frac{1}{2}v_1^2 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{1}{2}v_2^2 + \frac{p_2}{\rho}$$

Mamy 2 równnania i dwie niewiadome. Interesuje nas prędkość v_1. Z równania ciągłości dostajemy $v_2 = v_1(D/d)^2$. Wstawiamy to do równania Bernoulliego i mnożymy obie strony przez 2

$$v_1^2 + 2\frac{p_1}{\rho} = v_1^2\left(\frac{D}{d}\right)^2 + 2\frac{p_2}{\rho}$$

Prosta algebra pozwala stąd wyliczyć v_1

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left(\frac{D^2}{d^2} - 1\right)}}$$

Taki sam wzór podaje zresztą Wikipedia w artykule o zwężce Venturiego.
Mamy prędkość. Mnożąc ją przez przekrój przewodu dostaniemy (tak sądzę, że to jest to) szukany wydatek powietrza. Trzeba podstawić jedynie dane liczbowe.
Aby dostać wynik na prędkość w $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ trzeba ciśnienie wyrazić w Paskalach (gęstość w zadaniu ma właściwy wymiar, a stosunek średnic jest bezwymiarowy). Różnica ciśnień jest podana w zadaniu i wynosi $H_1 - H_2 = 100\,\text{mm H}_2\text{O}$. Woda ma gęstość $\text{r} = 1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, przyspieszenie ziemskie przyjmijmy za $g = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Wtedy ze wzoru $p = rgH$ dostaniemy
$p_1 - p_2 = 1000 \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 1000\,\text{Pa}$.

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1000}{1{,}3 \cdot \left(\frac{54^2}{36^2} - 1\right)}} \approx 36\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad \text{zatem} \quad \text{wydatek}\ \ Q = \pi(D/2)^2 v_1 \approx 0{,}08\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

W razie pytań pisz proszę na priv.
Pozdrowienia - Antek