

ZADANIA EGZAMINACYJNE ZE WSTĘPU DO MATEMATYKI, I M, 3.02.2012

1. Czy relacja R określona na $\mathbf{R}$ w sposób następujący:

$$\forall_{x,y \in \mathbf{R}} xRy \Leftrightarrow \operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} y$$

jest relacją równoważności? Jeśli tak, wskaż jej klasy abstrakcji.

2. Czy dla dowolnych zbiorów A, B, C prawdziwa jest następująca równość:

$$A \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times (A \setminus C).$$

3. Podaj przykład zbioru:

- (a) liniowo uporządkowanego, ale nie dobrze uporządkowanego;
- (b) dobrze uporządkowanego.

4. Jaką moc ma przedział $\langle -1; 5 \rangle$? W uzasadnieniu można skorzystać z twierdzenia Cantora-Bernsteina.

5. Określamy funkcję $f : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$ następująco (0 jest liczbą naturalną):

$$f(n, k) = n^2 k.$$

Czy funkcja ta jest różnowartościowa? Czy funkcja ta jest „na”?

6. Określamy funkcję $f : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$ następująco (0 jest liczbą naturalną):

$$f(n, k) = n^2 k.$$

Znajdź $f^{-1}(\{1\})$.

Znajdź $f(\mathbf{Par} \times \{0\})$, gdzie $\mathbf{Par}$ oznacza zbiór liczb naturalnych parzystych.

7. Podaj przykład formuły rachunku zdań z jedną zmienną (p), która jest:

- a) tautologią;
- b) kontrtautologią;
- c) nie jest ani tautologią, ani kontrtautologią;

(Można użyć tej zmiennej więcej niż raz.)

8. Zapisz używając języka rachunku kwantyfikatorów, symboli logicznych i arytmetycznych zdanie: „Liczba π nie jest pierwiastkiem żadnego trójmianu kwadratowego o współczynnikach wymiernych”.

9. Podaj przykład funkcji $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$, która jest „na”, ale nie posiada funkcji odwrotnej.

10. Czy dla dowolnej indeksowanej rodziny $\{A_t\}_{t \in T}$ zachodzi następująca własność:

$$\bigcup_{t \in T} A_t \subseteq \bigcap_{t \in T} A_t$$

11. Ile można zdefiniować różnych relacji równoważności na zbiorze dwuelementowym?

12. Podaj przykład zbioru uporządkowanego przez relację podzielności dla liczb naturalnych zawierającego 5 elementów – jednocześnie minimalnych i maksymalnych. Czy jest tam element najmniejszy? Czy jest tam element największy?
13. Zdefiniuj relację dwuargumentową na zbiorze liczb zespolonych porządkującą ten zbiór liniowo.
14. Podaj przykład właściwego podzbioru zbioru liczb zespolonych, który jest:
- a) skończony:
 - b) przeliczalny nieskończony:
 - c) mocy continuum:
15. Czy jest tautologią klasycznej logiki kwantyfikatorów:

$$\left((\forall x P(x)) \vee (\forall x Q(x)) \right) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)).$$