

Zadanie 3.

Zadanie możemy rozwiązać dokładnie używając schematu Bernoulliego. Zdarzeniem losowym jest ciąg 100-elementowy typu (pppsppp....p) gdzie porażką p jest "abonent nie dzwoni", sukcesem s jest "abonent dzwoni" w ciągu konkretnej minuty. Prawdopodobieństwo sukcesu wynosi 0,01, porażki 0,99.

Korzystamy ze wzoru Bernoulliego na prawdopodobieństwo $P(n)$ sukcesów i $N - n$ porażek w $N = 100$ próbach:

$$P(n) = \binom{100}{n} p^n (1-p)^{100-n} \quad (1)$$

Zastosujemy wzór (1) do podpunktów zadania.

(a) dokładnie trzech abonentów, mamy $n = 3$

$$P(3) = \binom{100}{3} 0,01^3 0,99^{97} = \frac{100!}{3! \cdot 97!} 0,01^3 0,99^{97} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{6} 0,01^3 0,99^{97} \approx 0,061 \quad (2)$$

(b) mniej niż trzech abonentów, czyli 0, 1 lub 2.

$$P(n < 3) = \binom{100}{2} 0,01^2 0,99^{98} + \binom{100}{1} 0,01^1 0,99^{99} + \binom{100}{0} 0,01^0 0,99^{100} \approx 0,921 \quad (3)$$

(c) więcej niż trzech abonentów. Zdarzeniem przeciwnym jest suma zdarzeń z podpunktów (a, b). Mamy więc:

$$P(n > 3) = 1 - 0,061 - 0,921 = 0,016 \quad (4)$$

(d) co najmniej jeden abonent. Zdarzeniem przeciwnym jest "zero abonentów".

$$P(n > 0) = 1 - P(0) = 1 - \binom{100}{0} 0,01^0 0,99^{100} \approx 0,634 \quad (5)$$

To samo zadanie możemy w przybliżeniu rozwiązać korzystając z rozkładu Poissona gdzie:

$$P(n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \quad (6)$$

Wartość oczekiwana $\lambda = 100 \cdot 0,01 = 1$, co ułatwia obliczenia.

$$P(3) = \frac{e^{-1} \cdot 1^3}{3!} = \frac{1}{e \cdot 3!} \approx 0,0613 \quad (7)$$

$$P(0) + P(1) + P(2) = \frac{1}{e \cdot 0!} + \frac{1}{e \cdot 1!} + \frac{1}{e \cdot 2!} \approx 0,92 \quad (8)$$

$$P(n > 3) \approx 0,019 \quad (9)$$

$$P(n > 0) = 1 - P(0) = 1 - \frac{1}{e \cdot 0!} \approx 0,632 \quad (10)$$

Jak widać wyniki są bardzo zbliżone.

Zadanie 4.

W tym zadaniu wartość średnia zmiennej losowej wynosi $\bar{x} = 280$, odchylenie standardowe $\sigma = 50$. Standaryzujemy dane do rozkładu $N(0,1)$ i szukamy wartości dystrybuanty dla poszczególnych wartości. Obliczmy to dokładnie dla podpunktu (a).

(a) w wysokości od 260 do 300 zł miesięcznie,

Wartość 260 zł odpowiada standaryzowanej zmiennej z_1 równej:

$$z_1 = \frac{260 - 280}{50} = -0,4 \quad (11)$$

Wartość 300 zł odpowiada standaryzowanej zmiennej z_2 równej:

$$z_2 = \frac{300 - 280}{50} = 0,4 \quad (12)$$

W tablicach łatwo znaleźć wartość dystrybuanty dla z_2 . Wynosi ona $F(z_2) = 0,6554$. Dla liczb ujemnych większość tablic nie podaje $F(z)$, ale radzimy sobie przekształceniem:

$$F(z_1) = 1 - F(|z_1|) = 1 - 0,6554 = 0,3446 \quad (13)$$

Następnie odejmujemy $F(z_2) - F(z_1)$ i wynik zamieniamy na procenty. Otrzymujemy:

$$F(z_2) - F(z_1) = 0,6554 - 0,3446 = 0,3108 \approx 31\% \quad (14)$$

(b) nie przekraczające 250 zł. Czyli od zera do 250.

Standaryzujemy 250:

$$z = \frac{250 - 280}{50} = -0,6 \quad (15)$$

W tablicach szukamy dystrybuanty dla $+0,6$ i odejmujemy ją od jedynki

$$F(z) = 1 - F(0,6) = 1 - 0,7257 = 0,2743 \approx 27\% \quad (16)$$

(c) w wysokości co najmniej 300 zł.

Standaryzujemy 300

$$z = \frac{300 - 280}{50} = 0,4 \quad (17)$$

Wartość $F(0,4) = 0,6554$. Znamy ją z podpunktu (a). Ale teraz pytanie jest o procent kredytów wyższy od 300 zł. (Od 300 do nieskończoności). Dlatego odejmujemy $F(0,4)$ od jedynki:

$$F(+\infty) - F(0,4) = 1 - 0,6554 = 0,3446 \approx 34\% \quad (18)$$

Pozdrowienia - Antek