

Zadanie 4.

Całka z zadania to całka z funkcji $f(r) = (x, y, x+y-1)$ po dr od $A(1,2,3)$ do $B(3,5,7)$

Jak się przyjrzyś zapisowi tej całki to zauważysz, że można ją zapisać jako całkę z **iloczynu skalarnego** pewnej wektorowej funkcji $\vec{F}(x, y, z)$ i zmiany położenia $\vec{dr}$ w taki sposób:

$$\int_{\text{z zadania}} = \int_{AB} \vec{F} \odot \vec{dr} = \int_{AB} \begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y-1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \quad (1)$$

gdzie kropka w kółku oznacza iloczyn skalarny.

Wybacz, jestem fizykiem, więc ten iloczyn $\vec{F} \odot \vec{dr}$ kojarzy mi się od razu z pracą wykonaną przez siłę $\vec{F}$ na krótkim odcinku drogi $\vec{dr}$. Wektor siły jest oczywiście ustawiony pod pewnym kątem do prostej AB.

Skoro już napisałem tę analogię powyżej to co nam szkodzi wyrazić zarówno siłę F , a także przemieszczenie dr w funkcji **jednej** zmiennej - czasu "t". Nazywa się to "parametryzacją". Zauważ, że tak naprawdę jest to jednowymiarowy problem - punkt porusza się po krzywej (w tym zadaniu - po prostej), działa siła zależna od położenia (czyli od **jednego** parametru - od czasu) i wektor $\vec{dr}$ też można zapisać w zależności od krótkiej chwili "dt".

Mamy więc do zrobienia wyznaczenie zależności położenia (w tym zadaniu - na linii prostej) od czasu. Czyli znalezienie $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Na pewno miałeś gdzieś na matmie tzw. "postać parametryczną" linii prostej. Zapisuje się ona tak: (znów fizyka się kojarzy...)

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v} t$$

Wektor $\vec{r}_0 = (1; 2; 3)$ to początkowe położenie. Wektor $\vec{v}$ to "wektor kierunkowy" równy po prostu wektorowi $\vec{AB} = [2; 3; 4]$. Czyli mamy taką zależność na $\vec{r}(t)$ i jego różniczkę $\vec{dr}$

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} t \quad \text{oraz} \quad \vec{dr} = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} dt \quad (2)$$

BINGO! Wstawiamy teraz zależności: $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 3t$, $z = 3 + 4t$ oraz $dx = 2dt$, $dy = 3dt$, $dz = 4dt$ do wzoru (1). Dostajesz:

$$\int_{\text{z zadania}} = \int_0^T [(1 + 2t) \cdot 2 + (2 + 3t) \cdot 3 + (1 + 2t + 2 + 3t - 1) \cdot 4] dt$$

Jak się domyślasz te liczby po kropkach wstawiłem ze wzoru (2), prawa strona.

Jeszcze kwestia granic całkowania. Zaczynamy od punktu A (czyli w parametryzacji od $t = 0$). Kończymy na czasie T, gdy punkt dotrze z A do B. Możemy T wyliczyć np. z zależności $x(t)$ dla punktu B:

$$x_B = 3 = 1 + 2T \quad \text{zatem} \quad T = 1$$

(to samo dostaniesz dla y : $5 = 2 + 3T$, oraz dla z : $7 = 3 + 4T$). W końcu nie po to parametryzowaliśmy tą prostą aby teraz dostać nieprawdę. Czyli całkujesz od 0 do 1.

Ubliżyłbym Twojej inteligencji gdybym to dalej liczył...

Podsumujmy: Krzywoliniowa całka w wielu wymiarach da się sprowadzić do "zwykłej" całki po parametrze "t", o ile da się zapisać wzory na x, y, z w zależności od t , oraz różniczki dx, dy, dz także w zależności od dt . Oczywiście da się to zrobić także w przypadku "prawdziwych" krzywych.