

$$f(x; y) = 3x^2 + 3y^2 - 4xy - 3x - 2y + 1$$

Obliczam pochodne cząstkowe pierwszego rzędu:

$$f'_x = 6x - 4y - 3$$

$$f'_y = 6y - 4x - 2$$

Przyrównuję pochodne cząstkowe pierwszego rzędu do zera, tworząc układ równań:

$$\begin{cases} 6x - 4y - 3 = 0 & \text{mnożę obustronnie przez 2} \\ 6y - 4x - 2 = 0 & \text{mnożę obustronnie przez 3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x - 8y - 6 = 0 \\ 18y - 12x - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{dodaję równania stronami}$$

$$12x - 8y - 6 + 18y - 12x - 6 = 0$$

$$10y = 12$$

$$y = 1,2$$

z pierwszego równania:

$$6x - 4 \cdot 1,2 - 3 = 0$$

$$6x = -7,8 \quad \Rightarrow \quad x = 1,3$$

Jedyny punkt stacjonarny to $P_1 = (1,3; 1,2)$

Obliczam drugie pochodne cząstkowe:

$$f''_{xx} = 6$$

$$f''_{xy} = -4$$

$$f''_{yy} = 6$$

Tworzę wyznacznik:

$$W = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 16 = 20$$

Ponieważ $W(P_1) > 0$ to funkcja $f(x; y)$ osiąga w punkcie $P_1 = (1,3; 1,2)$ ekstremum.

$$f''_{xx}(P_1) = 6 \Rightarrow 0 \text{ czyli jest to minimum.}$$

$$\text{Obliczam minimum: } f(1,3; 1,2) = 3x^2 + 3y^2 - 4xy - 3x - 2y + 1 = -2,15$$