

Tekst pisany na niebiesko to uwagi nie należące do opracowania.

W załączniku jest plik *.XLS zawierający:

- obliczenia do zadania (pierwszy arkusz)
- Wykres $T = f(L)$. Powinna być to linia podobna do pierwiastka kwadratowego, ale tak naprawdę przypomina prostą, gdyż zakres L jest zbyt mały, aby dał się zauważyć kształt pierwiastka (drugi arkusz).
- Wykres $T^2 = f(L)$. Powinna być to linia prosta, dorysowałem taką prostą, którą daje Excel (trzeci arkusz).
- Powiększony wykres $T^2 = f(L)$ (czwarty arkusz). Objaśnienia będą dalej.

Punkty 1 i 2.

Na wykresach $T = f(L)$ i $T^2 = f(L)$ są zaznaczone błędy pomiarowe. Niepewność $\Delta L = 0,2$ cm jest zbyt mała, aby była widoczna przy tej skali na wykresach. Niepewność okresu ΔT liczymy dzieląc podany błąd $\Delta t = 0,2$ s przez ilość okresów równą 10, czyli na wykresie $T = f(L)$ wartości ΔT są stałe i wynoszą 0,02 s. (to już widać na rysunku). UWAGA! NIE łączymy punktów pomiarowych linią - byłoby to bez sensu, bo sugerowałoby jakąś dziwną zależność $T(L)$, gdy tymczasem jest to zwykły pierwiastek.

Wykres $T^2 = f(L)$ powinien być linią prostą (ponieważ $T^2 = 4\pi^2 L/g$). Błędy pomiarowe $\Delta(T^2)$ liczymy metodą “różniczki zupełnej” czyli:

$$\Delta(T^2) = \frac{d}{dT} T^2 \cdot \Delta T = 2T \cdot \Delta T$$

(jak widać te błędy rosną ze wzrostem T; są policzone w Excel'u).

Punkt 3.

Z zależności $T(L)$ wynikającej z praw fizyki dla wahadła matematycznego spodziewamy się, że kwadrat T spełnia zależność:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L$$

czyli T^2 zależy liniowo od L. Nachylenie tej linii prostej (współczynnik przy L) jest równe $4\pi^2/g$ więc znając to nachylenie możemy znaleźć “g”. Jednak dopasowujemy metodą najmniejszych kwadratów **nie** linię $y = Ax$ lecz $y = Ax + B$ z tego powodu, że pomiary mogą być obarczone pewnym stałym błędem, niezależnym od dokładności linijki lub stopera. Może być on spowodowany np. czasem reakcji osoby dokonującej pomiaru lub błędem pomiaru długości wahadła - nie jest ono idealnym wahadłem matematycznym, mającym na końcu punkt materialny lecz jakąś kulkę.

We wzorze $y = Ax + B$ zmienną y jest T^2 a zmienną x jest długość L. W metodzie najmniejszych kwadratów współczynniki A i B obliczamy następująco (sumy we wzorach poniżej są sumami po pomiarach L oraz T^2 , “N” to ilość pomiarów, tutaj N = 9)

Zdefiniujmy: $S_x = \sum x_i$; $S_y = \sum y_i$; $S_{xx} = \sum x_i^2$; $S_{yy} = \sum y_i^2$; $S_{xy} = \sum x_i y_i$. Wtedy:

$$A = \frac{NS_{xy} - S_x S_y}{NS_{xx} - (S_x)^2} \quad \text{oraz} \quad B = \frac{S_{xx} S_y - S_x S_{xy}}{NS_{xx} - (S_x)^2}$$

Błąd współczynnika A, czyli ΔA liczymy ze wzoru:

$$\Delta A = \sqrt{\frac{N}{N-2} \frac{\sum (y_i - Ax_i - B)^2}{NS_{xx} - (S_x)^2}}$$

Wszystkie te wzory są w sieci, np. w Wikipedii - patrz “metoda najmniejszych kwadratów”. Błąd B też tam jest, ale nie będzie potrzebny. Obliczenia masz w Excelu. Ciąg dalszy opisu - na następnej stronie.

Po podstawieniu danych z zadania do wzorów otrzymujemy następujące równanie prostej:

$$y = 0,040x - 0,02 \quad \text{oraz} \quad \Delta A = 0,0012$$

Z wartości $A = 0,040$ obliczamy szukane "g" z równania:

$$A = \frac{4\pi^2}{g} \quad \text{zatem} \quad 0,040 = \frac{4\pi^2}{g}$$

Wychodzi stąd $g = 987 \text{ cm/s}^2$. Znajdźmy metodą różniczek zupełnej błąd Δg . Ponieważ $g = 4\pi^2/A$ to mamy (pomijamy znak minus)

$$\Delta g = \frac{d}{dA} \left(\frac{4\pi^2}{A} \right) \cdot \Delta A = \frac{4\pi^2}{A^2} \cdot \Delta A$$

Zauważ, że wygodniej jest liczyć błąd względny $(\Delta g)/g$. Dostajemy:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{4\pi^2/A^2}{4\pi^2/A} \Delta A = \frac{\Delta A}{A}$$

czyli względny błąd g jest taki sam jak względny błąd A, równy: $0,0012 / 0,040 = 0,03$ czyli 3 procent. **To jest ogólne prawo - jeśli we wzorze jest iloczyn lub iloraz to błąd względny wychodzi taki sam, jeśli we wzorze jest kwadrat, to wychodzi 2 razy większy błąd względny.**

Możemy teraz zapisać ostateczny wynik pamiętając o 3-procentowym błędzie. 3 procent z 987 to około 30. Nasz wynik na g zapisujemy więc (po przeliczeniu centymetrów na metry) jako:

$$g = 9,87 \pm 0,30 \text{ m/s}^2$$

Uwaga! Podajemy błąd z dokładnością co najwyżej do dwóch cyfr znaczących, podobnie wynik - nie ma sensu pisać np. $9,8701023 \pm 0,0324234$. **To ważne!**

Punkty 4 i 5

Współczynnik korelacji r liczymy ze wzoru

$$r = \frac{NS_{xy} - S_x S_y}{\sqrt{(NS_{xx} - S_x^2)(NS_{yy} - S_y^2)}} \approx 0,997$$

Otrzymaliśmy bardzo wysoką korelację ("r" jest bliskie 1) co świadczy o poprawnie przeprowadzonym eksperymencie. Otrzymana wartość g jest w granicach błędu równa tablicowej wartości 9,81 (gdyż błąd 0,3 daje szacowanie g od około 9,6 do 10,2).

Przyczyny błędu były już dyskutowane. Zauważmy, że w równaniu prostej pojawia się ujemna wartość $B = -0,02$. Jest to mniej, niż obliczone (na podstawie $\Delta T = 0,02$) wartości błędu ΔT^2 , wynoszące około 0,07. Ujemna wartość "B" może świadczyć o tym, że stoper był wyłączany zbyt szybko (albo włączany zbyt późno). Wartość tego błędu jest jednak zbyt mała, aby zarzucać pomiarom stały błąd systematyczny.

W razie pytań pisz proszę na priv, albo do mnie na adres: antek@upcpoczta.pl.

Pozdrowienia - Antek