

Tekst pisany na niebiesko jest komentarzem, nie należy do rozwiązania.

6.

Obliczamy pierwszą i potem drugą pochodną funkcji $h(x)$

$$h'(x) = \frac{(2x-2)(2x-1) - (x^2-2x)(2-0)}{(2x-1)^2} = 2 \frac{x^2-x+1}{(2x-1)^2}$$

$$h''(x) = 2 \frac{(2x-1)(2x-1)^2 - 2(x^2-x+1)(2x-1)(2-0)}{(2x-1)^4} = \frac{-6}{(2x-1)^3}$$

Druga pochodna jest zawsze różna od zera (**nie ma** punktów przecięcia).

Dla $x \in (-\infty; 1/2)$ druga pochodna jest **dodatnia** (funkcja wypukła).

Dla $x \in (1/2; +\infty)$ druga pochodna jest **ujemna** (funkcja wklęsła).

Jak już kiedyś pisałem nie jestem pewny kiedy funkcja jest wypukła, a kiedy wklęsła.

7.

Drugie równanie mnożymy przez -1 i zapisujemy jako pierwsze. Daje to macierzową postać tego układu:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Macierz rozszerzona układu ma postać jak niżej. **odejmujemy pierwszy wiersz od drugiego i dodajemy pierwszy wiersz do trzeciego. Następnie odejmujemy drugi wiersz od trzeciego.** Daje to ciąg przekształceń:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wiersz złożony z samych zer świadczy o tym, że układ jest **liniowo zależny** i niesprzeczny.

Każdy z minorów utworzonych z pierwszych dwóch wierszy i kolumn (1,2), (1,3), (2,3) czyli:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

ma niezerowy wyznacznik więc rząd macierzy 3×3 naszego równania wynosi 2.

Rozwiązaniem jest więc 1-wymiarowa podprzestrzeń. Wybieramy dowolnie parametr "z" i ze środkowego wiersza mamy $-3y + z = -2$ czyli $y = (z + 2)/3$. Z pierwszego wiersza $x = y$. Rozwiązanie można zapisać parametrycznie w postaci wektora:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) z + \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$$

ciąg dalszy na następnej stronie...

8.

Pierwsze równanie przedstawia parabolę w kształcie “U”, drugie linię prostą. Wykresy funkcji $h(x)$ i $g(x)$ przecinają się w punktach o współrzędnych x będących rozwiązaniem równania: $-1+x^2 = -x+1$ czyli w punktach $x_1 = -2$; $x_2 = 1$. W przedziale $< -2; 1 >$ krzywa $h(x)$ leży poniżej $g(x)$. Szukane pole P jest więc równe podwójnej całce:

$$P = \int_{-2}^1 \left[\int_{-1+x^2}^{-x+1} 1 \, dy \right] dx = \int_{-2}^1 (1-x+1-x^2) \, dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}$$

9.

Podstawiamy $t = \sin x$; wtedy $dt = \cos x \, dx$ i całka przechodzi na:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt = \int t^{-1/2} \, dt = \frac{1}{1/2} t^{1/2} = 2\sqrt{\sin x} + C$$
