Tekst pisany na niebiesko jest komentarzem, nie należy do rozwiązania.

Zadanie 1-a.

Warto by było wyprodukować zera w pierwszej kolumnie dodając i odejmując od siebie wiersze macierzy, ale nie wiem, czy tak robicie. Poza tym to jest tak mała macierz, że nie ma sensu się tak bawić. Wyznaczników macierzy 2x2 już nie rozpisuję Laplace'm, chyba nie ma sensu! Pamiętaj o znakach - naprzemian + i – przed wyrazami rozwinięcia.

$$\det M = (-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot [3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)] - 1 \cdot [(-5) \cdot 2 - 2 \cdot 1] + 2 \cdot [(-5) \cdot (-1) - 3 \cdot 1] = 32$$

Zadanie 2-b.

Będziemy intensywnie odejmować i dodawać wiersze macierzy produkując zera. Ta operacja nie zmienia wyznacznika. Ma końcu zostanie prosty do policzenia wyznacznik. Weźmy macierz 5x5 skonstruowaną jak w zadaniu. W pierwszym kroku odejmujemy pierwszy wiersz od pozostałych, co daje środkową postać macierzy. W drugim kroku do pierwszego wiersza dodajemy kolejno podwojone pozostałe wiersze.

$$|M_{5x5}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

Zróbmy to samo z macierzą 4x4

$$|M_{4x4}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

Jak widać pierwszy krok produkuje jedynki w pierwszej kolumnie, minus jedynki na przekątnej i zera poza tym z wyjątkiem pierwszego wiersza. Drugi krok zamienia pierwszy wiersz w zera z wyjątkiem pozycji M_{11} gdzie sumuje się N–1 dwójek (N - wymiar macierzy M)

Gdy rozwiniemy Laplace'm końcową macierz względem pierwszego wiersza to jedynym niezerowym składnikiem będzie iloczyn M_{11} przez wyznacznik macierzy $(N-1)x(N-1)$ zawierającej –1 na przekątnej. W zależności od "N" ten wyznacznik będzie równy +1 lub –1. Możemy więc napisać wzór na szukamy wyznacznik:

$$\det(M_{NxN}) = [1 + 2 \cdot (N-1)] \cdot (-1)^{N-1} = -(-1)^N (2N-1)$$

Mam nadzieję, że się nie pomyliłem...
Pozdrowienia - Antek