

Tekst na niebiesko nie należy do rozwiązywania. Sorry za wstawki z fizyki, ale chyba jesteś na matmie, nie na fizyce, dlatego dodałem kilka objaśnień. W razie czego - przepraszam!

Fizyka ruchu ciała w górę:

Oś X jest skierowana pionowo, za dodatni przyjmujemy zwrot "w górę". Wektor prędkości początkowej $\vec{v}_0$ ma zwrot dodatni. Za początek ruchu przyjmijmy $x_0 = 0$.

Trzeba osobno opisać wznoszenie się i opadanie, gdyż siła tarcia, zawsze skierowana przeciwnie do kierunku ruchu, ma różne zwroty w obu przypadkach. Dla ruchu w górę:

- Na ciało działa siła ciężkości $Q = mg$. (m - masa ciała, g - przyspieszenie ziemskie). Jest ona skierowana w dół, czyli trzeba ją wziąć ze znakiem minus dalej w tekście.
- Na ciało działa siła oporu powietrza (tarcia) $T = kv^2$. Jak poprzednio jest ona skierowana w dół, bierzemy ją z minusem.

Z drugiej zasady dynamiki Newtona, gdy przez "a" oznaczmy przyspieszenie (mające zwrot "w górę") dostaniemy równanie (1) (obie siły, Q i T, przeciwdziałają ruchowi)

$$ma = Q + T = -mg - kv^2 \quad (1)$$

Z fizyki wiadomo, że przyspieszenie jest pochodną prędkości po czasie, czyli $a = dv/dt$ więc równanie (1) zapisujemy, po podzieleniu obu stron przez "m", jako:

$$\frac{dv}{dt} = -\left(g + \frac{k}{m} v^2\right) \quad (2)$$

Koniec fizyki.

Równanie (2) to zwykle równanie o rozdzielonych zmiennych, dzielimy je przez prawą stronę i mamy, z drobną kosmetyką:

$$\frac{dv}{g + \frac{k}{m} v^2} = -dt \quad \text{zatem} \quad \frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{1 + \left(v \sqrt{\frac{k}{mg}}\right)^2} = -dt \quad (3)$$

Po podstawieniu $u = v \sqrt{\frac{k}{mg}}$ w mianowniku pojawi się $1 + u^2$ i po scałkowaniu obu stron (nie jestem masochistą użyłem programu) dostajemy:

$$\sqrt{\frac{m}{gk}} \cdot \arctan\left(v \sqrt{\frac{k}{gm}}\right) = -t + C \quad (4)$$

Jak się z tego obliczy "v" to wychodzi:

$$v = \sqrt{\frac{gm}{k}} \cdot \operatorname{tg}\left[\sqrt{\frac{gk}{m}}(-t + C)\right] \quad (5)$$

Stałą C wyznaczamy z warunku $v(0) = v_0$ czyli

$$v_0 = \sqrt{\frac{gm}{k}} \cdot \operatorname{tg}\left(C \sqrt{\frac{gk}{m}}\right) \quad \text{zatem} \quad C = \sqrt{\frac{m}{gk}} \arctan\left[v_0 \sqrt{\frac{k}{gm}}\right] \quad (6)$$

Stała C ma wymiar czasu (jak chcesz sprawdzić, to zauważ, że wymiarem "k" są kg/metry). Nazwijmy ją więc t_0 . Mamy już przyjemniejszy wzór na $v(t)$

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{k}} \cdot \operatorname{tg}\left[(t_0 - t) \sqrt{\frac{gk}{m}}\right] \quad (7)$$

Zrobiłem wykres $v(t)$ dla: $g=10$, $m=1$, $k=0,1$ $v_0=100$.

Wynik jest w pliku "v-od-t-w-gore.pdf". $v(t)$ ma postać: $v(t) = 10 \operatorname{tg}(1.47113 - t)$

Po czasie około 1,47 s prędkość spada do zera i wzór dla ruchu w górę przestaje obowiązywać.

Zobaczmy jeszcze, co się dzieje, gdy tłumienie (czyli stała “k”) dąży do zera. We wzorze (6), dla małych k, funkcja arctg(z) zachowuje się jak z, czyli stała C (nazwana t_0) dąży do:

$$C \rightarrow \sqrt{\frac{m}{gk}} \cdot v_0 \sqrt{\frac{k}{gm}} = \frac{v_0}{g} \quad (8)$$

a we wzorze (7) także tg(z) zachowuje się jak z, czyli prędkość dąży do:

$$v(t) \rightarrow \sqrt{\frac{gm}{k}} \cdot \left(\frac{v_0}{g} - t \right) \sqrt{\frac{gk}{m}} = v_0 - gt \quad (9)$$

czyli do wzoru na prędkość w ruchu jednostajnie opóźnionym w polu grawitacyjnym.

Możemy już odpowiedzieć na jedno z pytań z zadania: Czas **wznoszenia się ciała** wynosi t_0 , obliczone jako “C” we wzorze (6).

Obliczmy maksymalną wysokość x_{max} . Przyjmijmy $x_0 = 0$ na początku ruchu i scałkujmy równanie (7) w zakresie od 0 do t_0 . To jest zwykła całka z tg(z), pominię szczegóły. Program mówi, że wychodzi:

$$x_{max} = -\frac{m}{k} \ln \left[\cos \left(\arctan(v_0 \sqrt{k/(gm)}) \right) \right] \quad (10)$$

Ten kosinus z arctg można jeszcze uprościć gdyż $\cos[\arctan(z)] = 1/\sqrt{1+z^2}$ i dostajemy:

$$x_{max} = -\frac{m}{k} \ln \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{kv_0^2}{gm}}} \right] = \frac{m}{2k} \ln \left(1 + \frac{k}{gm} v_0^2 \right) \quad (11)$$

Zauważ, że gdy k dąży do zera to $\ln(1+z)$ zachowuje się jak z, całe wyrażenie dąży do:

$$x_{max} \rightarrow \frac{m}{2k} \cdot \frac{k}{gm} v_0^2 = \frac{v_0^2}{2g} \quad (12)$$

czyli do wzoru na wysokość w rzucie pionowym bez oporu powietrza. To potwierdza nasze wyniki.

Zajmiemy się teraz czasem spadania i prędkością w chwili upadku.

Zrobimy jak poprzednio, ale przyjmijmy za dodatni kierunek **w dół**, więc wektor $\vec{g}$ ma zwrot dodatni, wektor $\vec{v}(t)$ także, siła tarcia ma zwrot ujemny. Znajdziemy zależność $v(t)$ oraz $x(t)$. Założymy, że $x(0) = 0$ i policzymy czas, kiedy x osiąga wartość x_{max} z równania (11). Podstawiając ten czas do $v(t)$ znajdziemy prędkość v_{max} w chwili upadku.

Równanie różniczkowe na prędkość ma teraz postać:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \quad (13)$$

Różnica jest w znakach, ale prowadzi to do zupełnie innego wyniku. Dzielimy przez mg, rozdzielamy zmienne:

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{1 - \left(v \sqrt{\frac{k}{mg}} \right)^2} = dt \quad (14)$$

Po scałkowaniu otrzymujemy:

$$\sqrt{\frac{m}{gk}} \operatorname{arctgh} \left(v \sqrt{\frac{k}{mg}} \right) = t + C \quad (15)$$

Rozwiązaniem nie jest już arc tangens lecz arc tangens **hiperboliczny**. Znajdujemy $v(t)$. Ponieważ $v(0) = 0$ to ze wzoru (15) wynika, że $C = 0$.

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \operatorname{tgh} \left(t \sqrt{\frac{kg}{m}} \right) \quad (16)$$

Sprawdźmy, co dzieje się gdy tłumienie jest małe. Dla małych z $\operatorname{tgh}(z)$ zachowuje się jak z czyli

$$v(t) \rightarrow \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot t \sqrt{\frac{kg}{m}} = gt \quad (17)$$

czyli $v(t)$ wygląda jak przy swobodnym spadku z przyspieszeniem g .

Całkujemy równanie (16) w granicach od 0 do x_{max} aby znaleźć czas spadania t_{max}

$$x_{max} = \frac{m}{k} \ln \left[\cosh \left(t_{max} \sqrt{\frac{gk}{m}} \right) \right] \quad (18)$$

Sprawdźmy, co dzieje się dla małych k . Funkcja $\cosh(z)$ dla małych z zachowuje się jak $1 + z^2/2$, a z kolei $\ln(1 + z^2/2)$ jak $z^2/2$. Wobec tego

$$x(t) \rightarrow \frac{m}{k} \cdot \frac{1}{2} t^2 \frac{gk}{m} = \frac{1}{2} gt^2 \quad (19)$$

czyli jak przy swobodnym spadku.

Z równania (18) wyliczamy t_{max} . Mnożymy obie strony przez k/m , umieszczamy w wykładniku e^z i rozpisujemy $\cosh(z)$

$$y = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \quad \text{gdzie} \quad y = e^{\frac{k}{m} x_{max}} \quad \text{oraz} \quad u = t_{max} \sqrt{\frac{gk}{m}} \quad (20)$$

Podstawiamy $w = e^u$ i rozwiązujemy powstające równanie kwadratowe $w^2 - 2yw + 1 = 0$, co daje:

$$w_1 = y - \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{oraz} \quad w_2 = y + \sqrt{y^2 - 1} \quad (21)$$

Przypomnijmy sobie równanie (11) na x_{max} . Gdy pomnożymy $(k/m)x_{max}$ to wyrażenie na y możemy zapisać jako:

$$y = \left(e^{\ln(\dots)} \right)^{1/2} = \sqrt{1 + \frac{k}{mg} v_0^2} \quad \text{zatem} \quad y^2 - 1 = \frac{k}{mg} v_0^2 \quad (22)$$

co prowadzi do rozwiązań w_1, w_2 w postaci:

$$w_1 = \sqrt{1 + \frac{k}{mg} v_0^2} - \sqrt{\frac{k}{mg} v_0^2} \quad \text{oraz} \quad w_2 = \sqrt{1 + \frac{k}{mg} v_0^2} + \sqrt{\frac{k}{mg} v_0^2} \quad (23)$$

Przypominam, że $w = e^u$, czyli $u = \ln(w)$ natomiast u jest bezwymiarowe i proporcjonalne do t_{max} . Popatrz na wykresy w załączniku "pierwiastki-w1-w2.pdf". Czerwony wykres odpowiada $w_1(v_0)$, a zielony $w_2(v_0)$ (jednostki na poziomej osi są umowne).

Gdyby przyjąć rozwiązanie w_1 (które jest zawsze mniejsze od jedynki) to logarytmując je dostalibyśmy **ujemny** czas t_{max} . Jest to niefizyczne więc rozwiązaniem na t_{max} jest:

$$t_{max} = \sqrt{\frac{m}{gk}} \ln \left[\sqrt{1 + \frac{k}{mg} v_0^2} + \sqrt{\frac{k}{mg} v_0^2} \right] \quad (24)$$

Jak zwykle sprawdźmy, co dzieje się przy braku tarcia. Gdy k jest małe to umiejętnie rozwijając w szereg logarytm (robiłem to programem) dostajemy:

$$t_{max} \rightarrow \sqrt{\frac{m}{gk}} \cdot \sqrt{\frac{kv_0^2}{gm}} = \frac{v_0}{g} \quad (25)$$

zgodnie z wynikiem dla ruchu bez tarcia; czasy wznoszenia się i spadania są jednakowe, początkowa prędkość v_0 jest tracona po czasie t_{max} .

Obliczmy jeszcze końcową prędkość v_{max} wstawiając t_{max} do równania (16). Zauważ, że czynniki $\sqrt{kg/m}$ i $\sqrt{m/(gk)}$ się zniosą i zostanie tylko $\tanh[\ln(\dots)]$. Oznaczamy wyrażenie pod logarytmem przy t_{max} przez “z” i rozpisujemy $\tanh()$.

$$v_{max} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{e^{\ln(z)} - e^{-\ln(z)}}{e^{\ln(z)} + e^{-\ln(z)}} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{1 - 1/z}{z + 1/z} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \quad (26)$$

Podstawiamy “z” i po niemiłej dłubaninie, którą na szczęście robi program, mamy:

$$v_{max} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{\sqrt{kv_0^2(mg + kv_0^2)}}{mg + kv_0^2} \quad (27)$$

Przy minimalnym tarcu z pierwiastka w liczniku oszczędzamy tylko $v_0\sqrt{mgk}$, w mianowniku zapominamy o kv_0^2 i mamy:

$$v_{max} \rightarrow \sqrt{\frac{mg}{k}} \frac{v_0\sqrt{mgk}}{mg} = v_0 \quad (28)$$

czyli końcowa prędkość jest równa początkowej, jak można było oczekiwać.

Mam nadzieję, że się nie pomyliłem. Pozdrowienia - Antek