

Ostrosłup jest pokazany na rysunku w załączniku. Podstawa (trójkąt równoboczny) to ABC. Każda ze ścian ABD, ACD, BCD jest trójkątem równoramiennym. Wiemy, że bok podstawy jest równy "a", oraz wysokość OD ma długość 2a.

Ostrosłup przecięto płaszczyzną ACE prostopadłą do krawędzi. **Każda** prosta leżąca na płaszczyźnie ACE jest więc prostopadła do DB; wykorzystamy to.

Pole przekroju ACE byłoby do policzenia, gdybyśmy znali wysokość FE trójkąta ACE. Próbujemy znaleźć tę wysokość.

Trójkąt BFE jest prostokątny (kąt prosty to FEB, kiepsko to widać na rysunku, ale jak wspomniałem **każda** prosta wychodząca z E i leżąca na płaszczyźnie ACE jest prostopadła do BD, więc FE także). Napiszmy wzór na długość FE z tw. Pitagorasa:

$$|FE| = \sqrt{|FB|^2 - x^2} \quad (1)$$

gdzie "x" to długość odcinka EB, **nie** jest to połowa BD, a przynajmniej nie można tak założyć. Trzeba znaleźć z kolei "x".

Będzie jeszcze jedna zmienna, ale to już ostatnia. Oznaczmy przez L długość krawędzi DB. Zauważ, że odcinek AE jest prostopadły do DB (powód jak poprzednio) więc używając tw. Pitagorasa na trójkątach AEB i AED możemy napisać układ równań:

$$\begin{cases} L^2 = |AE|^2 + (L - x)^2 \\ a^2 = |AE|^2 + x^2 \end{cases}$$

Odejmujemy stronami drugie z równań od pierwszego i dostajemy, po wymnożeniu nawiasu i skróceniu kwadratu L

$$L^2 - a^2 = (L - x)^2 - x^2 \quad \text{zatem} \quad x = \frac{a^2}{2L} \quad (2)$$

To już prawie koniec "wchodzenia w głąb". Długość L dostaniemy z tw. Pitagorasa w trójkącie BOD pamiętając, że odcinek OB to 2/3 wysokości trójkąta równobocznego ABC. Czyli:

$$L = \sqrt{|OB|^2 + (2a)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + (2a)^2} = a\sqrt{\frac{13}{3}}$$

Wstawiamy L do równania (2)

$$x = \frac{a^2}{2a\sqrt{\frac{13}{3}}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{13}}$$

Wstawiamy x do równania (1) pamiętając, że FB to wysokość trójkąta ABC

$$|FE| = \sqrt{\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{13}}\right)^2} = a\sqrt{\frac{9}{13}}$$

Szukane pole trójkąta to:

$$P = \frac{1}{2} a |FE| = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{26} a^2$$

Jeśli się nie pomyliłem...

Pozdrowienia - Antek