

Tekst pisany na niebiesko jest komentarzem, nie należy do rozwiązania.

W całkach gdzie jest pierwiastek z trójmianu kwadratowego w mianowniku sprowadzamy ten trójmian do postaci $y^2 + 1$ lub $-y^2 + 1$ i wtedy całka daje arcus sinus hiperboliczny lub zwykły.

Zadanie 4a. Trójmian w mianowniku nie ma pierwiastków rzeczywistych, przekształcamy go do $y^2 + 1$.

$$x^2 - x + 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 3 = \frac{11}{4} \left[\left(\frac{2x}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{11}}\right)^2 + 1 \right]$$

Podstawiamy $y = (2x - 1)/\sqrt{11}$; wtedy $x = y\sqrt{11}/2 + 1/2$ oraz $dx = (\sqrt{11}/2) dy$ i całka przechodzi na: Pamiętaj, że $11/4$ jest w mianowniku pod pierwiastkiem, dlatego poniżej upraszcza się.

$$= \frac{2}{\sqrt{11}} \frac{\sqrt{11}}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 1}} = \operatorname{arcsinh} y = \operatorname{arcsinh} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{11}} \right) + C$$

Zadanie 4b. Ten trójmian prosi się o przekształcenie do $-y^2 + 1$.

$$-x^2 + 6x - 5 = -(x - 3)^2 + 9 - 5 = 4 \left[-\left(\frac{x - 3}{2}\right)^2 + 1 \right]$$

Pamiętaj, że 4 jest w mianowniku pod pierwiastkiem, dlatego poniżej upraszcza się. Podstawiamy $y = (x - 3) / 2$; wtedy $dx = 2 dy$ i całka przechodzi na:

$$2 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{-y^2 + 1}} = \arcsin y = \arcsin \left(\frac{x - 3}{2} \right) + C$$

Pozdrowienia - Antek