Tekst na niebiesko jest komentarzem lub treścią zadania.

1. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2 - 4x - 21}$
To jest całka z funkcji wymiernej. Ponieważ mianownik można zapisać jako $(x+3)(x-7)$ zapisujemy wyrażenie podcałkowe jak niżej i dobieramy A, B:

$$\frac{1}{x^2-4x-21} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-7} = \frac{A(x-7)+B(x+3)}{(x+3)(x-7)} = \frac{(A+B)x-7A+3B}{x^2-4x-21}$$

Z porównania współczynników przy x w pierwszym i ostatnim wyrażeniu wynika, że $A+B=0$ oraz $-7A+3B=1$, co daje A = –1/10, B = 1/10. Liczymy całkę:

$$\int \ldots = \frac{1}{10}\int \frac{-1}{x+3} + \frac{1}{x-7}\,dx = \frac{1}{10}\left(-\ln(x+3)+\ln(x-7)\right) = \left[\frac{1}{10}\ln\frac{x-7}{x+3}\right]_1^2$$

Tu uwaga: Wyrażenie pod logarytmem jest **ujemne** w przedziale (1;2). Ale funkcja podcałkowa jest w tym przedziale poprawnie określona, skończona, więc całka musi być skończona. Po prostu trzeba konsekwentnie doprowadzić obliczenia do końca, podstawiając granice całkowania.

$$\int \ldots = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{2-7}{2+3}\cdot\frac{1+3}{1-7}\right) = \frac{1}{10}\ln\frac{2}{3} \approx -0{,}04$$

Otrzymaliśmy ujemny wynik bo liczymy całkę, nie pole, a funkcja podcałkowa jest ujemna w granicach całkowania.

---

2. Oblicz pole pod sinusoidą od 0 do $\pi/2$
Obliczamy poniższą całkę:

$$P = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 0-(-1) = 1$$

Fajnie wyszło !!! Te zadania w ogóle są prostsze od Twojego drugiego zestawu.

---

3. Pole obszaru ograniczonego krzywymi $x^2+y^2=5$ i $y=2/x$
Poprawny rysunek masz zrobiony. Weźmy tylko to pole w kształcie () w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych. Z dołu ogranicza je hiperbola, z góry okrąg. Dzielimy pole na pionowe paski o szerokości dx, wykonujemy całkowanie:

$$P = \int\limits_{x1}^{x2}\int\limits_{2/x}^{\sqrt{5-x^2}} dy\,dx = \int\limits_{x1}^{x2}\left(\sqrt{5-x^2}-\frac{2}{x}\right)dx$$

Problemem jest znalezienie punktów x_1, x_2 gdzie hiperbola przecina okrąg. Podstawiamy równanie hiperboli do równania okręgu:

$$x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 5 \quad \text{zatem} \quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Zapisujemy to równanie dwukwadratowe jako: $(x^2-4)(x^2-1)=0$ Mamy stąd rozwiązania w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych: $x_1 = 1, x_2 = 2$. Resztę zrobisz, pokazywałem Ci całkę z pierwiastka, podstaw sinus i nie pomyl się !

4. Udowodnić obj. stożka, wysokość h, promień podstawy r $V = \frac{1}{3}\pi\, r^2\, h$

Oznaczmy może przez H całą wysokość, przez R cały promień podstawy stożka. Kroimy stożek na poziome plastry o grubości dh. Każdy plaster jest odległy o “h” od wierzchołka stożka i jest kołem o promieniu ”r”.

Objętość jednego takiego plastra to $dV = \pi r^2\, dh$

Z podobieństwa trójkątów mamy $r/h = R/H$, zatem $r = h \cdot (R/H)$. Wstawiamy to do wzoru na objętość plastra:

$$dV = \pi\, h^2 \cdot (R/H)^2\, dh$$

Aby otrzymać całą objętość całkujemy powyższy wzór od h = 0 do H

$$V = \int_0^H \pi\, h^2 \cdot (R/H)^2\, dh = \left[\pi (R/H)^2\right] \cdot \frac{H^3}{3R} = \frac{1}{3}\pi\, R^2\, H$$

No i gotowe, tylko na dużych literach.

W razie pytań albo jak się pomyliłem pisz proszę na priv.

Pozdrowienia - Antek