

MATEMATYKA STOSOWANA – SERIA I
TRANSPORT -STUDIA NIESTACJONARNE DRUGIEGO STOPNIA

Zadanie 1. Napisać szereg Fouriera dla funkcji

$$(a) f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad (b) f(x) = \begin{cases} \pi, & -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$(c) f(x) = |\sin x|, \quad x \in [-\pi, \pi]; \quad (d) f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 3 \end{cases}$$

Sumę jakiego szeregu liczbowego otrzymany w przykładach (a) i (b)

kładąc: $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$, a jakiego gdy zastosujemy wzór Parsewala?

Sumę jakiego szeregu otrzymamy w przykładach (c) i (d) kładąc $x = 0$?

Zadanie 2. Dla funkcji $f(x)$, $x \in [0, l]$, $l > 0$ danej poniższym wzorem :

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ l - x, & \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases} \quad \text{podać jej przedłużenie parzyste i nieparzyste na}$$

przedział $[-l, l]$ oraz napisać jej rozwinięcie w szereg sinusów i cosinusów.

Zadanie 3. Korzystając z definicji transformaty Fouriera wyznaczyć transformaty następujących funkcji:

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{dla } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 1 < |x| \leq 2 \\ 0 & \text{dla } |x| > 2 \end{cases}; \quad (b) f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{dla } |x| > 1 \end{cases}; \quad (c) f(x) = xe^{-|x|}$$

Zadanie 4. Wyznaczyć transformaty cosinus-Fouriera F_c i sinus-Fouriera F_s dla następujących funkcji:

$$(a) f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{dla } x > \pi \end{cases}; \quad (b) f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{dla } x > \pi \end{cases}; \quad (c) f(x) = e^{-x^2}$$

Zadanie 5.

Dla funkcji gamma Eulera : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0$ obliczyć

$$(a) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right), \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right). \quad \text{Wiadomo, że: } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(b) Udowodnić, że funkcja beta Eulera : $B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, a, b > 0$

zapisze się w postaci:

$$B(a, b) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2a-1} x \sin^{2b-1} x dx$$