

(1)

Wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu ma postać jak niżej. Podnosimy cały nawias do kwadratu

$$a_n = \left(2^n + \frac{(-1)^n}{2^n}\right)^2 = (2^n)^2 + 2 \cdot (-1)^n \cdot \frac{2^2}{2^n} + \left(\frac{(-1)^n}{2^n}\right)^2 = 4^n + 2(-1)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Należy obliczyć sumę trzech ciągów: geometrycznego o pierwszym wyrazie 4 i ilorazie 4, geometrycznego o pierwszym wyrazie  $1/4$  i ilorazie  $1/4$ , oraz naprzemiennego. Ta ostatnia suma daje  $-2$  dla nieparzystego  $n$  oraz zero dla parzystego  $n$ . Cała suma to:

$$S_n = 4 \frac{4^n - 1}{4 - 1} + \frac{1}{4} \frac{1 - \frac{4^n}{4}}{1 - \frac{1}{4}} + [(-1)^n - 1] = \frac{1}{3} \left(4^{n+1} - \frac{1}{4^n} - 3\right) + [(-1)^n - 1]$$

Zauważ, że wyraz  $[(-1)^n - 1]$  daje  $-2$  dla nieparzystych  $n$ , zero dla parzystych i po to jest on we wzorze na sumę.

**UWAGA.** Jeżeli w tym zadaniu NIE MA minusa w pierwszym nawiasie to cała zabawa z  $-1$  nie jest potrzebna, zamiast tego sumujemy  $n$ -krotnie liczbę 2 dostając  $2n$ .

---

(2)

Z warunku na ciąg geometryczny iloczyn  $a$  i  $c$  jest równy kwadratowi  $b$ . Ponieważ  $0,7(2)$  to ułamek  $13/18$  mamy 3 równania na  $a, b, c$ .

$$\begin{cases} ac = b^2 \\ a + b + c = 26 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{13}{18} \end{cases}$$

W trzecim równaniu przenosimy na prawo  $1/b$  i sprowadzamy obie strony do wspólnych mianowników. Z pierwszego równania bierzemy iloczyn  $ac$  i podstawiamy do trzeciego. Z drugiego bierzemy sumę  $a + c$  i też podstawiamy. Wychodzi:

$$\frac{a + c}{ac} = \frac{13b - 18}{18b} \quad \text{zatem} \quad \frac{26 - b}{b^2} = \frac{13b - 18}{18b}$$

Wymnażamy proporcję:

$$13b^3 - 18b^2 = 468b - 18b^2 \quad \text{zatem} \quad (13b^2 - 486)b = 0$$

Liczyby  $a, b, c$  mają być dodatnie więc zostaje jedyne rozwiązanie  **$b = 6$** .

Wstawiamy  $b$  oraz kwadrat  $b$  do początkowego układu równań, który ma teraz postać:

$$\begin{cases} ac = 36 \\ a + c = 26 - 6 \end{cases}$$

Z drugiego równania obliczamy  $a = 20 - c$ , wstawiamy do pierwszego:

$$(20 - c)c = 36$$

Rozwiązanie tego równania kwadratowego dostarcza dodatnie pierwiastki  **$c = 2$**  lub  **$c = 18$**  i odpowiednio liczb  **$a = 18$**  lub  **$a = 2$**

Szukany ciąg to albo **2, 6, 18** albo **18, 6, 2**.

---