Przyjmijmy pionową oś symetrii jako oś OY, a za oś OX przymijmy poziomą podstawę trójkąta. Wtedy boki trójkąta opisują równania prostych: $x = (3/8)\, y - (3/2)\, c$ oraz $x = -(3/8)\, y + (3/2)\, c$.
Te proste będą granicami całkowania po trójkącie. Całkowanie po prostokącie odbywa się w granicach $x = \pm\, 2c$.

Środek ciężkości. Najprościej byłoby obliczyć masy trójkąta i prostokąta, i wiedząc, gdzie są ich srodki ciężkości na osi OY (w pozycjach $(4c/3)$ i $-(34)\, c)$ znaleźć od razu środek ciężkosci całej figury. Ale zróbmy to "formalnie".

Współrzędna środka ciężkości $x_s = 0$ ze wzgledu na symetrię względem osi OY. Obliczamy współrzedną y_s. Aby uniknąć nadmiaru pisania przyjmijmy, że gęstość powierzchniowa figury $\sigma = 1\,\mathrm{kg/m^2}$. Dzielimy trójkąt i prostokąt na poziome paski o szerokości dy. W przypadku trójkata masa dm takiego paska jest równa $dy \int\limits_{x_1}^{x_2} dx$ gdzie x_1 i x_2 są punktami przecięć paska z prostymi o wzorach zapisanych na początku. W przypadku prostokąta masa paska to po prostu $4c\, dy$. Do obliczenia jest więc całka:

$$y_s = \frac{\int\int y\, dm}{M} = \frac{\sigma}{M} \int\limits_0^{4c} \left(\int\limits_{x_1}^{x_2} dx \right) y\, dy - \frac{\sigma}{M} \int\limits_0^{(3/2)\, c} 4c\, y\, dy$$

gdzie M jest masą całej figury równą: $\sigma \cdot 3c \cdot 4c/2 + \sigma \cdot (3/2)\, c \cdot 4c = 9\sigma\, c^2$ (nie będę się wygłupiał z obliczaniem masy trójkata i prostokąta przez całkowanie). Przed drugą całką stoi minus bo prostokat leży pod osią OX.

Pierwsza z całek po dx daje po prostu "x" w granicach wyznaczonych przez wzory prostych czyli wielkość: $-(3/8)\, y + (3/2)\, c - [(3/8)\, y - (3/2)\, c] = 3c - (3/4)\, y$. W rezultacie mamy do policzenia całkę:

$$y_s = \frac{1}{9c^2} \left[\int\limits_0^{4c} y\, [3c - (3/4)\,]\, y\, dy - (9/2)c^3 \right] = \frac{8c^3 - (9/2)\, c^3}{9c^2} = \frac{7}{18}\, c$$

Przyznaję, że ładnie to nie wychodzi... Środek ciężkości całości leży w trójkącie, nieco mniej niż (1/2) c powyżej jego podstawy. Zweryfikujmy to jeszcze licząc ważoną średnią (wagami są masy trójkąta i prostokata) położenia środków ciężkości. Środek ciężkości trójkąta - przypominam - leży nad osią OX w odległości (4/3) c od niej, środek cieżkości prostokata poniżej osi, w odległości (3/4) c.

$$y_x = \frac{(4/3)\, c \cdot 6c^2 - (3/4)\, c \cdot 3c^2}{6c^2 + 9c^2} = \frac{7}{18}\, c$$

Zgadza się. Ponieważ to y_s wychodzi takie nieprzyjemne będziemy liczyć na następnej stronie moment bezwładności względem podstawy trójkata, a następnie uzyjemy twierdzenia Steinera aby przesunąć do do położenia y_s.

Moment bezwładności względem osi OY jest łatwiejszy, bo figura jest symetryczna względem tej osi. Mamy do policzenia całkę: $I_x = \int\int x^2\, dm$. Ponownie dzielimy figurę na trójkąt i prostokąt i używamy tych samych granic całkowania, co poprzednio, tylko w wewnętrznej całce jest teraz x^2. Wtedy:

$$I_x = \sigma \int\limits_0^{4\, c} \left(\int\limits_{x_1}^{x^2} x^2\, dx \right) dy + \sigma \int\limits_0^{(3/2\, c)} \left(\int\limits_{-2c}^{2c} x^2\, dx \right) dy$$

Zauważ, że **dodajemy** trójkąt i prostokąt, bo jest x^2 pod całką. Jak sie to policzy (użyłem programu) to wychodzi:

$$I_x = \frac{41}{4}\, \sigma\, c^4$$

Zwróć uwagę, że "c" ma wymiar metra, σ ma wymiar $\mathrm{kg/m^2}$ więc całe wyrażenie ma wymiar $\mathrm{kg\, m^2}$.

(ciąg dalszy na następnej stronie)

Moment bezwładności względem osi OX liczymy dodając momenty bezwładnosci trójkąta i prostokąta względem podstawy trójkata. Wzór jest podobny do tego, uzywanego do obliczania środka masy, tylko zamiast y piszemy y^2 oraz sumujemy obie całki.

$$I'_y = \int\int y^2\,dm = \sigma \int\limits_0^{4c} \left(\int\limits_{x_1}^{x_2} dx \right) y^2\,dy + \sigma \int\limits_0^{(3/2)\,c} 4c\,y^2\,dy$$

Zauważ, że napisałem I'_y bo to nie jest jeszcze moment bezwładnosci względem srodka masy.

Wykonujemy wewnętrzną całke jak poprzednio i mamy:

$$I'_y = \sigma \left[\int\limits_0^{4c} y^2\,[3c - (3/4)\,]\,y\,dy + \sigma\,(9/2)c^4 \right] = 16c^4 + (9/2)\,c^4 = \frac{41}{2}\,\sigma\,c^4$$

Ostatni krok do wyznaczenia momentu bezwładności względem osi przechodzącej przez srodek masy to uzycie tw. Steinera:

$$I_y = I'_y - M\,y_s^2 = \frac{41}{2}\,\sigma\,c^4 - 9\,\sigma\,c^2 \cdot \frac{7^2}{18^2}\,c^2 = \frac{689}{36}\,\sigma\,c^4$$

Moment dewiacji jest określany całką: $I_{xy} = \int\int xy\,dm$ Poprawka na twierdzenie Steinera jest tutaj zerem gdyż współrzędna x_s leży na osi symetrii układu, będącej jednocześnie jedną z osi głównych. Do policzenia mamy więc całkę:

$$I_{xy} = I'_{xy} = \sigma \int\limits_0^{4\,c} \left(\int\limits_{x_1}^{x^2} x\,dx \right) y\,dy + \sigma \int\limits_0^{(3/2\,c)} \left(\int\limits_{-2c}^{2c} x\,dx \right) y\,dy = 0$$

Zauważ, że obie całki po dx zerują się wskutek symetrii względem pionowej osi. Dlatego cały wynik jest zerem - brak jest momentów dewiacyjnych.

Wynika z tego także, że osie przechodzące przez punkt $(0; 7/18)$ i równoległe do przyjetych początkowo osi OX i OY są jednocześnie **głównymi osiami bezwładnosci**.

Przykro mi, ale nie wiem, co to jest "koło Landa-Mohra". Nie jestem z Politechniki i nie chciałbym napisać czegoś źle.

W razie pytań pisz proszę na priv.

Pozdrowienia - Antek