

Zadanie 1.

Lecący z południa samolot, poruszający się z prędkością $100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ląduje na przebiegającym w kierunku północ-południe pasie startowym. Lądowanie odbywa się przy wietrze z północnego wschodu, który przesuwa samolot z prędkością $10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Pod jakim kątem do pasa (i w którym kierunku) musi zostać skierowany ciąg samolotu żeby wylądował dokładnie w osi pasa?

Proszę, zrób rysunek, mnie się nie bardzo chce...

Najpierw układ współrzędnych. Oś X skierowana jest z zachodu na wschód, oś Y z południa na północ.

Z początku układu XY zaznacz wektor $\vec{w}$ prędkości wiatru. Ma on kierunek $(-1, -1)$ i długość 10.

Teraz wektor $\vec{v}$ prędkości samolotu. Ponieważ wiatr ma składową w kierunku zachodnim samolot musi lecieć na **południowy wschód**. Ponieważ prędkość samolotu wynosi 100, więc długość wektora $\vec{v}$ jest 10 razy większa od długości $\vec{w}$, odchylenie w kierunku wschodnim jest więc niewielkie. Wypadkowa obu wektorów daje wektor $\vec{u}$, który ma się pokrywać z osią Y. Wektor $\vec{u}$ ma kierunek $(0, -1)$, a jego długość nas nie obchodzi.

Oznacz przez α kąt między $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Tego kąta szukamy.

Teraz właściwe rozwiązanie. Aby składowa x-owa wektora wypadkowego była zerem wystarczy, aby zniosły się x-owe składowe wektorów $\vec{w}$ i $\vec{v}$. Wektor $\vec{w}$ jest nachylony pod kątem 45° do osi więc musi zachodzić równość:

$$|\vec{w}| \cos 45^\circ = |\vec{v}| \sin \alpha \quad \text{zatem} \quad \sin \alpha = \frac{|\vec{w}|}{|\vec{v}|} \cos 45^\circ$$

I to całe rozwiązanie. Podstawmy dane (wynik jest bezwymiarowy)

$$\sin \alpha = \frac{10}{100} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,0707$$

Taki sinus odpowiada kątowi około $\alpha = 4^\circ$. Koniec zadania.

Zadanie 2.

Rzucając kamień (z prędkością początkową $v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$) pod pewnym kątem jestem w stanie dorzucić go na odległość 30 m. Jaki byłby zasięg mojego rzutu (pod tym samym kątem) gdybym zamiast na płaskiej powierzchni stanął na dach 20 metrowego budynku ($g=10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$) ?

Oznaczmy przez α kąt wyrzutu i przez $L = 30$ m zasięg rzutu na płaskiej powierzchni. Przez $H = 20$ m oznaczmy wysokość budynku.

Użyjemy równania na rzut ukośny w postaci $y(x)$. Wygląda ono tak:

$$y(x) = x \operatorname{tg} \alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (1)$$

Gdy do równania (1) podstawimy $y = 0$ to otrzymamy równanie kwadratowe, z którego mamy albo $x = 0$, albo zasięg na płaskiej powierzchni: $x = L$. Nie ma co wyprowadzać znanego wzoru na zasięg:

$$L = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \quad \text{zatem} \quad \sin(2\alpha) = \frac{gL}{v_0^2} \quad (2)$$

Z równania (2) możemy więc znaleźć kąt wyrzutu α i użyć go w równaniu (1).

Ale jak go użyć? Aby nie zmieniać równania (1) zastosujemy sztuczkę. Zauważ, że zamiast wchodzić na dach budynku o wysokości H , możemy sobie wyobrazić, że zaraz za punktem rzutu jest uskok terenu i dziura o głębokości H . Pytamy się, jakie będzie “ x ” gdy kamień spadnie na dno dziury? Podstawiamy do równania (1) $y = -H$ i dostajemy:

$$-H = x \operatorname{tg} \alpha - x^2 \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (3)$$

Równanie (3) trzeba rozwiązać ze względu na “ x ”, i mamy szukany zasięg. Przyznaję, że to niemiłe, więc pozwoliłem sobie na użycie programu do symbolicznego rozwiązywania równań i dostałem:

$$x_{1,2} = \frac{v_0^2 \sin \alpha \pm v_0 \sqrt{2gH \cos \alpha + v_0^2 \sin^2 \alpha}}{g} \quad (4)$$

Zauważ, że wymiar wyniku się zgadza gdyż $2gH$ ma wymiar kwadratu prędkości więc cały pierwiastek ma wymiar prędkości, cały licznik wymiar kwadratu prędkości, co, dzielone przez przyspieszenie w mianowniku daje metry.

Odrzucamy rozwiązanie z minusem, daje ono $x < 0$, nie jest bezsensowne, oznacza tylko, że ktoś z tyłu rzucałby we mnie kamieniem z dna doliny.

Dalsze obliczenia na wzorach - przekształcenie (4) tak, aby był tam $\sin(2\alpha)$ wyznaczony we wzorze (2) jest jednak masochizmem. Bierzemy kalkulator i liczymy z równania (2)

$$\sin(2\alpha) = \frac{10 \cdot 30}{20^2} = 0,75 \quad \text{zatem} \quad \alpha \approx 24,29519^\circ$$

Wstawiamy α do równania (4) i dostajemy:

$$x_{1,2} = \frac{20^2 \sin(24,29519^\circ) + 20 \cdot \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 30 \cdot \cos(24,29519^\circ) + 20^2 \cdot \sin^2(24,29519^\circ)}}{10} \approx 66$$

Czyli zasięg wzrasta do **około 66 m**.

Zadanie 3.

Kula o masie 1 kg stacza się (bez tarcia) z równi pochyłej o wysokości 1 metra. Gdy stoczy się z równi trafia ją pocisk karabinowy o masie 0,01 kg lecący z prędkością $700 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i łączy się z nią. W którą stronę polecą kula z pociskiem w środku? Czy wtoczy się na równię? Na jaką wysokość?

UWAGA. Od razu piszę, że zadanie jest mylące i moje rozwiązanie może być nie tyle złe, co niedokładne. Chodzi o to, że jeżeli nie ma tarcia, to kula **nie może się toczyć**. Będzie się ślizgać, jak klocek, bo nie ma siły (tarcia) która wprawiłaby ją w ruch obrotowy.

Ponieważ chcę zastosować zasadę zachowania energii w rozwiązaniu to gdybym przyjął, że kula się stacza, to jej liniowa prędkość na dole równi byłaby mniejsza, niż gdyby się ślizgała, bo część energii potencjalnej poszłaby na energię związaną z ruchem obrotowym kuli.

Dlatego zamiast “kula” piszę dalej “klocek”, który zsuwa się bez tarcia w dół równi. Prawdopodobnie jest to poprawne założenie, bo nic nie wiemy o promieniu kuli itp.

Oznaczmy dane: $M = 1 \text{ kg}$ to masa klocka, $m = 0,01 \text{ kg}$ to masa pocisku, $H = 1 \text{ m}$ to początkowa wysokość klocka, $v_p = 700 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ to prędkość pocisku. Poza tym założmy, że pocisk trafia w klocek już na płaskim terenie.

Rozwiązanie składa się z trzech etapów:

- obliczenie prędkości klocka u podstawy równi (z zasady zachowania energii)
- obliczenie prędkości klocka + pocisku (z zasady zachowania pędu)
- obliczenie wysokości na równi (ponownie z zasady zachowania energii, o ile będzie potrzebne)

Pierwszy etap: Z zasady zachowania energii: cała energia potencjalna klocka na wysokości H zamieni się w jego energię kinetyczną u podstawy równi. Oznaczmy przez “ v ” prędkość klocka na dole równi, wtedy:

$$MgH = \frac{1}{2}Mv^2 \quad \text{zatem} \quad v = \sqrt{2gH} \quad (5)$$

Od razu obliczymy v , będzie za chwilę potrzebna:

$$v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 1} \approx 4,47 \quad (6)$$

Drugi etap: Klocek zderza się z pociskiem. Pęd klocka (równy Mv) ma **przeciwny** do zwrot niż pęd pocisku, równy mv_p . Wypadkowy pęd układu “klocek + pocisk” będzie równy **różnicy** ich początkowych pędów. Oznaczmy przez “ u ” końcową prędkość po zderzeniu, masa układu to $M + m$. Mamy równanie:

$$(M + m)u = Mv - mv_p \quad \text{zatem} \quad u = \frac{Mv - mv_p}{M + m} \quad (7)$$

Teraz musimy rozstrzygnąć, co dalej z klockiem. Zauważ, że w równaniu (6) za dodatni przyjąłem zwrot prędkości **klocka**. Jeżeli po podstawieniu danych prędkość “ u ” wyjdzie dodatnia, to klocek zwolni, ale nie wróci na równię. Jeśli będzie ujemna, klocek wraz z pociskiem będą posuwać się w górę równi. Podstawiamy (biorąc v z obliczenia 6)

$$u = \frac{1 \cdot 4,47 - 0,01 \cdot 700}{1 + 0,01} \approx -2,5 \quad (8)$$

Jednak ujemna prędkość! To znaczy, że klocek z pociskiem w środku zawróci na równię. Obliczamy (ponownie z zasady zachowania energii) wysokość h , na które się wzniosą. Analogicznie jak w równaniu (5) porównujemy energie, ale teraz liczymy “ h ”. Zauważ, masa to $M+m$, ale i tak się skróci.

$$(M + m)gh = \frac{1}{2}(M + m)u^2 \quad \text{zatem} \quad h = \frac{u^2}{2g} \quad (9)$$

Ciąg dalszy nie zmieści się na jednej stronie...

Podstawiamy dane, używając wartości “u” z obliczenia (8)

$$h = \frac{(-2,5)^2}{2 \cdot 10} \approx 0,63$$

Czyli klocek wjedzie z powrotem na równię na wysokość około 0,63 m.

Zadanie 4.

Na szczycie równi pochyłej o kącie 45 stopni i wysokości 2 metrów umieszczono masę 5 kg. Współczynnik tarcia statycznego między ciężarkiem a równią równy jest $f_s = 0,7$, natomiast współczynnik tarcia kinematycznego $f_k = 0,4$. Czy ciężarek zacznie się zsuwać, jeśli tak ile czasu mu to zajmie, jeśli nie to jaki musiałby być kąt aby się zsunąć?

Znów nie chce mi się robić rysunku, rozkład sił na równi znajdzie w wielu miejscach. Istotne jest, że siła, która ściąga masę w dół to $mg \sin \alpha$, a siła tarcia, hamująca ruch, to $fmg \cos \alpha$.

Brutalnie wykorzystam dane z zadania: Kąt $\alpha = 45^\circ$, a wtedy sinus i kosinus są równe sobie. Aby ciężarek utrzymał się nieruchomo potrzebny jest warunek aby co najmniej

$$mg \sin \alpha = fmg \cos \alpha \quad \text{co daje w tym wypadku} \quad 1 \geq 0,7$$

Widać, że współczynnik tarcia statycznego f_s jest za mały, musiałby być równy $f_s = 1$, aby utrzymać ciężarek. Wobec tego masa m zacznie się zsuwać. Oznaczmy przez “a” przyspieszenie ciężarka, wtedy z II zasady dynamiki mamy (zauważ, że teraz już używamy tarcia kinematycznego f_k)

$$ma = mg \sin \alpha - f_k mg \cos \alpha \quad \text{zatem} \quad a = g(\sin \alpha - f_k \cos \alpha) \quad (10)$$

Dalej już jest prosto: Czas t wyznaczamy z równania na drogę w ruchu jednostajnie przyspieszonym. Droga to $H / \sin \alpha$, czyli mamy, podstawiając przyspieszenie z równania (10)

$$\frac{H}{\sin \alpha} = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{zatem} \quad t = \sqrt{\frac{2 \frac{H}{\sin \alpha}}{a}} = \sqrt{\frac{2H}{g(\sin \alpha - f_k \cos \alpha) \sin \alpha}} \quad (11)$$

Wymiar wyniku:

$$[t] = \sqrt{\frac{\text{m}}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = \text{s}$$

Podstawiamy dane:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot 2}{10 \cdot (\sin 45^\circ - 0,4 \cdot \cos 45^\circ) \cdot \sin 45^\circ}} \approx 1,15$$

Czas zjazdu ciężarka to około **1,15 s**. Dla porównania czas swobodnego spadku z wysokości 2 m to około 0,63 s, a czas zjazdu bez tarcia po tej równi to około 0,89 s. Równia i tarcie robią swoje.

Mam nadzieję, że się nie pomyliłem, w razie czego pisz na priv.

Pozdrowienia - Antek