

Tekst pisany na niebiesko jest komentarzem, nie należy do rozwiązania.

1. Pierwsza granica

Dzielimy licznik i mianownik przez n^5 .

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2 - 1/n)^5}{-4 - 3/n^3} = \frac{2^5}{-4} = -8$$

1. Druga granica

Spełnione są warunki stosowania de l'Hospitala. Licznik i mianownik są różniczkowalne w liczbach rzeczywistych i w nieskończoności dążą do nieskończoności. Stosujemy tw. de l'Hospitala dwukrotnie. Pierwszy raz:

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10x - 3}{2x e^{x^2-1}} =$$

Drugi raz, warunki ponownie są spełnione. Mianownik dąży do nieskończoności.

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10}{2e^{x^2-1} + 4x^2 e^{x^2-1}} = 0$$

2.

Liczmy granicę w $x = 3$. Dzielimy licznik i mianownik przez x^2

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - 3/x + 2/x^2}{-1 + 6/x - 9/x^2} = \frac{1}{-1} = -1$$

Wartość granicy $f(x)$ gdy $x \rightarrow 3$ (z dowolnej strony) jest **różna** od definicji $f(3) = -0,5$.

Funkcja jest **nieciągła** w $x = 3$.

3.

Powiększamy licznik zastępując 9 przez drugie 5^n oraz pomijamy w mianowniku 4^n . Dla dużych "n" mamy zależność:

$$a_n = \frac{5^n + 9}{4^n + 7^n} < \frac{2 \cdot 5^n}{7^n} = 2 \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^n = b_n$$

Warunek konieczny zbieżności szeregu b_n jest spełniony gdyż ułamek $5/7$ jest mniejszy od 1 i wyraz $b_n \rightarrow 0$ w nieskończoności. Stosujemy kryterium Cauchy'ego do pokazania zbieżności szeregu b_n .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{2} \cdot \frac{5}{7} \right) = \frac{5}{7}$$

ponieważ pierwiastek n-tego stopnia z 2 dąży do 1. Granica określana przez kryterium Cauchy'ego jest mniejsza od 1, więc ciąg b_n jest zbieżny. Wobec tego zbieżny jest także ciąg z zadania.
