

$$\int x \arcsin(1/x) dx$$

Nie myśl, że sam to zrobiłem - wrzuciłem tę całkę do sieci (patrz “Wolfram alfa”) dostałem wynik i teraz pytanie jak do niego dojść, bo aby dostać szczegóły trzeba wykupić abonament na tamtym serwerze. Ale wynik sugeruje opisane niżej podejście...

Spróbujmy przez części czyli ze wzoru: $\int f'g = fg - \int fg'$. Trzeba się pozbyć nie milego $\arcsin$, więc funkcją, którą całkujemy, jest $f(x)=x$, a różniczkujemy $\arcsin$. To jest funkcja złożona $\arcsin(y)$ gdzie $y = 1/x$ więc ze wzoru na pochodną funkcji złożonej mamy:

$$\frac{d}{dx} \arcsin\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}} \quad (1)$$

Nasza całka wygląda więc teraz tak:

$$\int \dots = \frac{1}{2}x^2 \arcsin(1/x) + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2} \frac{1}{\sqrt{1-1/x^2}} dx \quad (2)$$

W drugim wyrażeniu po prawej stronie skracamy x^2 i zostaje do policzenia taka całka:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx \quad (3)$$

Z tego już łatwo, podstawiając $t = x^2 - 1$ czyli $x dx = dt/2$ dostać całkę z $1/\sqrt{t}$ i końcowy wynik:

$$\int x \arcsin(1/x) dx = \frac{1}{2}x^2 \arcsin(1/x) + \frac{1}{2}x\sqrt{1-1/x^2} + C$$

Jeśli się pomyliłem to pisz proszę na priv.

Pozdrowienia - Antek