

Zadanie 3.

Dane:

$L = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$ - długość początkowa sprężyny

$k = 50 \text{ N/m}$ - stała sprężystości

$T = 0,5 \text{ s}$ - okres drgań

Szukane:

m - masa ciężarka

Korzystamy ze wzoru na okres drgań:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{zatem} \quad m = \frac{T^2 k}{4\pi^2}$$

Sprawdźmy wymiar $[m]$

$$[m] = s^2 \cdot \frac{N}{m} = s^2 \cdot \frac{kg \cdot m/s^2}{m} = kg$$

Przeprowadźmy obliczenia:

$$m = \frac{0,5^2 \cdot 50}{4\pi^2} \approx 0,32 \text{ kg}$$

Druga część zadania zawiera pułapkę. Skrócenie sprężyny **zmienia** współczynnik k . Chodzi o to, że “ k ” nie jest stałą materiału z którego wykonano sprężynę lecz także innych wielkości. Prawo Hooke’a w pełnej postaci wygląda tak:

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{ES}$$

gdzie ΔL jest wydłużeniem, L - długością sprężyny, F - działającą siłą, S - polem przekroju, E - to tzw. “moduł Younga”, stała specyficzna dla danego materiału.

Z powyższego wzoru wyliczamy ΔL w zależności od siły F :

$$\Delta L = \frac{L}{ES} F = k F$$

Jak widać stała sprężystości “ k ” zależy od długości L i jest tym mniejsza, im mniejsze jest L . W tym zadaniu po przecięciu każdy kawałek sprężyny ma **dwukrotnie mniejszą** stałą sprężystości.

Jednocześnie na ciężarek działa dwukrotnie większa siła gdyż przy wychyleniu o ΔL jeden kawałek sprężyny jest ściskany, drugi rozciągany i każdy z nich próbuje wrócić do swojego kształtu więc obie działające siły mają jednakowy zwrot.

Przypominam wyprowadzenie wzoru na okres drgań: Piszemy takie równanie (gdzie “ a ” jest przyspieszeniem, m - masą, F - działającą siłą)

$$m a = F = -k \Delta L$$

i z niego oblicza się częstotliwość kątową ω , zapisując równanie drgań harmonicznym w postaci:

$$a = -\omega^2 \Delta L \quad \text{zatem} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Zobaczmy, jak wygląda to wyprowadzenie w przypadku połączonych sprężyn. Siła jest 2 razy większa, $F' = 2F$, ale współczynnik sprężystości 2 razy mniejszy, $k' = k/2$. Masa m i wydłużenie ΔL pozostają bez zmian.

$$m a' = F' = 2F = -2k' \Delta L = -2 \frac{k}{2} \Delta L = -k \Delta L$$

Czyli $a' = a$. Układ sprężyn reaguje **tak samo** jak jedna sprężyna, wobec tego $\omega' = \omega$. Częstotliwość jest taka sama więc:

Okres drgań nie zmieni się i nadal wynosi 0,5 s.

Zadanie 4.

Dane:

$x = 10 \text{ cm}$ - wydłużenie sprężyny

$\Delta x = 10 \text{ cm}$ - kolejne wydłużenie sprężyny

$W = 50 \text{ J}$ - praca potrzebna do pierwszego wydłużenia

Szukane:

ΔW - praca potrzebna do drugiego wydłużenia

Wzór na pracę W potrzebną do rozciągnięcia sprężyny o współczynniku sprężystości k o długość x jest następujący:

$$W = \frac{1}{2} k x^2$$

Jeśli tą samą sprężynę rozciągamy o długość $x + \Delta x$ wykonamy pracę:

$$W + \Delta W = \frac{1}{2} k (x + \Delta x)^2$$

Dzielimy stronami drugie równanie przez pierwsze aby pozbyć się k

$$\frac{W + \Delta W}{W} = \frac{(x + \Delta x)^2}{x^2}$$

Z ostatniego równania wyliczamy szukane ΔW

$$\Delta W = W \left(\frac{(x + \Delta x)^2}{x^2} - 1 \right)$$

Wymiary W i ΔW są jednakowe gdyż centymetry w ułamku skracają się. Obliczamy:

$$\Delta W = 50 \cdot \left(\frac{(10 + 10)^2}{10^2} - 1 \right) = 50 \text{ J}$$

Zadanie 5.

Dane:

$m_1 = 100 \text{ g}$

$m_2 = 200 \text{ g}$

$x_0 = 5 \text{ cm}$

$g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ - przyspieszenie ziemskie, będzie potrzebne

Szukane:

T - okres drgań

Znajomość wydłużenia sprężyny pod ciężarem masy m_1 służy do wyznaczenia współczynnika sprężystości k . Z prawa Hooke'a:

$$m_1 g = k x_0 \quad \text{zatem} \quad k = \frac{m_1 g}{x_0}$$

Teraz stosujemy "zwykły" wzór na okres drgań pamiętając, że dodano drugą masę:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) x_0}{m_1 g}}$$

Sprawdzamy wymiar wyniku:

$$[T] = \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2}} = \text{s}$$

Obliczamy. Wymiar masy skraca się, mogą zostać gramy. Natomiast centymetry zamieniamy na metry.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(100 + 200) \cdot 0,05}{100 \cdot 10}} \approx 0,77 \text{ s}$$

Zadanie bez numeru.

Dane:

$k = 20 \text{ N/m}$ - współczynnik sprężystości

$m = 1 \text{ kg}$ - masa obciążnika

$A = 10 \text{ cm}$ - amplituda

Szukane: - bardzo dużo różnych rzeczy.

(a) Częstotliwość f jest odwrotnością okresu T . Wzór na okres był już wiele razy. Od razu podstawiamy dane, wymiarem wyniku jest $1/\text{s}$ czyli herc (Hz).

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{20}{1}} \approx 0,71 \text{ Hz}$$

(b) Zakładamy, że w chwili $t = 0$ obciążnik znajdował się w położeniu równowagi czyli $x = 0$. Wtedy równaniem ruchu jest sinusoida:

$$x(t) = A \sin(2\pi f t) \approx 10 \sin(4,47 t) [\text{cm}]$$

Wykres: Narysuj sinusoidę o amplitudzie 10 cm i okresie będącym odwrotnością częstotliwości, czyli na poziomej osi czasu sinus powtarza się co około $1,4 \text{ s}$. Na pionowej osi są cm .

(c) Wykresem jest teraz kosinus określony wzorem:

$$v(t) = 2\pi A f \sin(2\pi f t) \approx 44,7 \sin(4,47 t) [\text{cm/s}]$$

Wykres: Narysuj KOsinusoidę o amplitudzie $44,7 \text{ cm/s}$ i okresie jak poprzednio. Pamiętaj że w chwili $t = 0$ prędkość $v(t)$ ma wartość maksymalną. Na pionowej osi są cm/s .

(d)

Energia potencjalna od czasu:

$$E_p(t) = \frac{1}{2} k x(t)^2 = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(2\pi f t)$$

Energia kinetyczna od czasu:

$$E_k(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2 = \frac{1}{2} m A^2 4\pi^2 f^2 \cos^2(2\pi f t) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(2\pi f t)$$

Wyraz przed kosinusem przekształciłem korzystając ze wzoru na częstotliwość f z punktu (a) zadania.

Energia całkowita E jest sumą energii kinetycznej i potencjalnej. Korzystamy z “jedyнки trygonometrycznej”, a do obliczeń amplitudę wyrażamy w metrach, $A = 0,1 \text{ m}$.

$$E = E_p + E_k = \frac{1}{2} k A^2 \left(\sin^2(2\pi f t) + \cos^2(2\pi f t) \right) = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 0,1^2 = 0,1 \text{ J}$$

Wymiar $[E]$

$$[E] = \frac{N}{m} \cdot m^2 = N \cdot m = J$$

Zadanie 158.

Dane: $x = \sqrt{3}/2 A$

$T = 4 \text{ s}$

Szukane:

t - czas po którym x osiąga podaną wartość.

Do wzoru na wychylenie $x(t)$ wstawiamy warunek z zadania:

$$x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} A = A \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad \text{zatem} \quad \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sinus o tej wartości odpowiada kątowi $\pi/3$, więc:

$$2\pi \frac{t}{T} = \frac{\pi}{3} \quad \text{zatem} \quad t = \frac{T}{6}$$

Skoro okres T wynosi 4 s, to szukany czas $t = \frac{2}{3} \text{ s}$.

Zadanie 159.

Rysunek 40:

Amplituda $A = 2 \text{ cm}$, okres $T = 4 \text{ s}$. Nie mogę przeczytać tej trzeciej literki.

Rysunek 41:

Amplituda $A = 4 \text{ cm}$, okres $T = 2 \text{ min}$.

Teraz widzisz, dlaczego mi długo zeszło, od diabła trzeba się napisać!

Pozdrowienia - Antek.