f(x; y) = 6xy – x^3 - y^3

$$Obliczam\ pochodne\ cząstkowe\ pierwszego\ rzędu:$$

$$f'_x = 6y - 3x^2$$
$$f'_y = 6x - 3y^2$$

$$Przyrównuję\ pochodne\ cząstkowe\ pierwszego\ rzędu\ do\ zera, tworząc\ układ\ równań:$$

$$\begin{cases} 6y - 3x^2 = 0 \\ 6x - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

I

$$\begin{cases} 6y = 3x^2 \\ 6x = 3y^2 \end{cases} \quad mnożę\ równania\ stronami$$

$$36xy = 9(xy)^2 \quad => \quad \frac{36}{9} = xy = 4 \quad => \quad x = \frac{4}{y}$$

$$Po\ podstawieniu\ do\ drugiego\ równania:$$

$$6 \cdot \frac{4}{y} = 3y^2 \quad => \quad 24 = 3y^3 \quad => \quad y^3 = 8 \quad => \quad y = 2\ \ i\ \ x = \frac{4}{y} = \frac{4}{2} = 2$$

$$Pierwszym\ punktem\ stacjonarnym\ jest\ P_1 = (2,2)$$

II

$$\begin{cases} 6y = 3x^2 \\ 6x = 3y^2 \end{cases} \quad dodaję\ równania\ stronami$$

$$6y + 6x = 3x^2 + 3y^2 \quad dzielę\ obustronnie\ przez\ 3$$

$$2y + 2x = x^2 + y^2$$

$$x^2 - 2x \ = y^2 - 2y =$$

$$x(x-2) = y(y-2)$$

$Punkt\ x = 2\ i\ y = 2\ znalazłem\ powyżej\ więc\ drugim\ punktem\ stacjonarnym$ $jest\ P_2 = (0,0)$

$$Obliczam\ drugie\ pochodne\ cząstkowe:$$

$$f''_{xx} = -6x$$
$$f''_{xy} = 6$$
$$f''_{yy} = -6y$$

$Tworzę\ wyznacznik:$

$$W = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -6y \end{vmatrix} = 36xy - 36 = 36(xy-1)$$

$Obliczam\ jego\ wartości\ dla\ punktów\ stacjonarnych:$

$W(P_1) = 36(xy-1) = 36(2 \cdot 2 - 1) = 108$

$Ponieważ\ W(P_1) > 0\ to\ funkcja\ f(x;y)\ osiąga\ w\ punkcie\ \ P_1 = (2,2)\ ekstremum.$

$f''_{xx}(P_1) = -6x = -6 \cdot 2 = -12 < 0\ czyli\ jest\ to\ minimum.$

$Obliczam\ minimum: f(2;2) = 6xy - x^3 - y^3 = 6 \cdot 2 \cdot 2 - 2^3 - 2^3 = 8$

$W(P_2) = 36(xy-1) = 36(0 \cdot 0 - 1) = -36$

$Ponieważ\ W(P_2) < 0\ to\ funkcja\ f(x;y)\ nie\ ma\ ekstremum\ w\ punkcie\ \ P_2 = (0,0)$.