

UWAGA: Tekst na niebiesko jest komentarzem.

Zadanie B.

Zapiszmy wzór z zadania jak niżej, będzie potem mniej pisania:

$$\sum_{k=1}^n (k \cdot k!) = (n+1)! - 1 \quad (1)$$

Dla $n = 1$ suma po lewej stronie wzoru (1) ogranicza się do pierwszego wyrazu, czyli do $1 \cdot 1! = 1$, a prawa strona to $2! - 1 = 2 - 1 = 1$, więc równość (1) jest spełniona.

Zakładamy, że równość (1) jest prawdziwa dla “ n ” i udowadniamy tezę, że jest ona prawdziwa dla “ $n + 1$ ”. Zauważ, że rozbijam sumę od 1 do $n+1$ na sumę od 1 do n i $n+1$ -szy wyraz.

Lewa strona wzoru (1) dla $n+1$ to:

$$L = \sum_{k=1}^{n+1} (k \cdot k!) = \sum_{k=1}^n (k \cdot k!) + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \quad (2)$$

gdzie w drugim “=” korzystamy z założenia indukcyjnego zamieniając sumę od 1 do n na wyrażenie z prawej strony wzoru (1). Przekształcamy jeszcze wynik (2) wyciągając $(n+1)!$ przed nawias:

$$L = (1 + n + 1) \cdot (n+1)! - 1 = (n+2) \cdot (n+1)! - 1 = (n+2)! - 1 \quad (3)$$

Otrzymujemy identyczny wynik jak we wzorze (1) po wstawieniu $n+1$ w miejsce n po prawej stronie wzoru (1) co kończy dowód.

Zadanie C.

Zapiszmy wzór z zadania jak niżej ze względu na dalsze rozumowanie:

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} - 4a_n = 0 \quad (4)$$

Jest to “równanie rekurencyjne liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach”. Znalazłem w sieci teorię sprowadzania takich równań do jawnej postaci.

Zakładamy postać jawną podanej postaci rekurencyjnej jako:

$$a_n = c \cdot q_1^n + d \cdot q_2^n \quad (5)$$

Teoria - dlaczego - była pewnie na wykładzie, albo jest w sieci. Podstawy potęg q_1, q_2 znajdujemy rozwiązując równanie charakterystyczne $q^2 + uq + v = 0$ gdzie u, v są liczbami przy a_{n+1} i a_n we wzorze (4); tutaj: $u = -5$ oraz $v = -4$. Rozwiązujemy więc równanie:

$$q^2 - 5q - 4 = 0 \quad (6)$$

Rozwiązania to (mające niemiły wygląd, może jest błąd w treści zadania?)

$$q_1 = \frac{5 - \sqrt{41}}{2} \quad \text{oraz} \quad q_2 = \frac{5 + \sqrt{41}}{2} \quad (7)$$

Wobec tego jawna postać wzoru z zadania to

$$a_n = c \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{41}}{2} \right)^n + d \cdot \left(\frac{5 + \sqrt{41}}{2} \right)^n \quad (8)$$

Współczynniki c, d znajdujemy ze znajomości $a_0 = 2$ i $a_1 = 2$ podstawiając kolejno $n = 0$ oraz $n = 1$ do wzoru (8), co daje układ równań:

$$\begin{cases} 2 = c + d \\ 2 = c \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{41}}{2}\right) + d \cdot \left(\frac{5 + \sqrt{41}}{2}\right) \end{cases} \quad (9)$$

Rozwiązanie to (też niemiłe)

$$c = 1 + \frac{3}{\sqrt{41}} \quad \text{oraz} \quad d = 1 - \frac{3}{\sqrt{41}} \quad (10)$$

Szukaną jawną postacią wzoru z zadania jest więc:

$$a_n = \left(1 + \frac{3}{\sqrt{41}}\right) \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{41}}{2}\right)^n + \left(1 - \frac{3}{\sqrt{41}}\right) \cdot \left(\frac{5 + \sqrt{41}}{2}\right)^n \quad (11)$$

Udowodnimy ten wzór metodą indukcji. Dla $n = 0$ mamy oczywiście

$$a_0 = \left(1 + \frac{3}{\sqrt{41}}\right) \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{41}}{2}\right)^0 + \left(1 - \frac{3}{\sqrt{41}}\right) \cdot \left(\frac{5 + \sqrt{41}}{2}\right)^0 = \left(1 + \frac{3}{\sqrt{41}}\right) \cdot 1 + \left(1 - \frac{3}{\sqrt{41}}\right) \cdot 1 = 2$$

Podobnie dla $n = 1$ wychodzi:

$$a_1 = \left(1 + \frac{3}{\sqrt{41}}\right) \cdot \left(\frac{5 - \sqrt{41}}{2}\right)^1 + \left(1 - \frac{3}{\sqrt{41}}\right) \cdot \left(\frac{5 + \sqrt{41}}{2}\right)^1 = 2$$

Drugi krok dowodu indukcyjnego polega na pokazaniu, że jeżeli jawna postać a_n jest dana wzorem (5) przy obliczonych wyżej [wzory (7) i (10)] wartościach c, d, q_1, q_2 to mamy wykazać, że a_{n+2} można zapisać także jawnie jako: $a_{n+2} = cq_1^{n+2} + dq_2^{n+2}$

Obliczamy a_{n+2} korzystając ze wzorów (4) i (5) przy obliczonych współczynnikach c, d, q . Otrzymujemy ze wzoru (4) przy założeniu (5)

$$a_{n+2} - 5 \cdot (c \cdot q_1^{n+1} + d \cdot q_2^{n+1}) - 4 \cdot (c \cdot q_1^n + d \cdot q_2^n) = 0 \quad (12)$$

Z równania(12) wyliczamy a_{n+2} w postaci:

$$a_{n+2} = 5 \cdot (c \cdot q_1^{n+1} + d \cdot q_2^{n+1}) + 4 \cdot (c \cdot q_1^n + d \cdot q_2^n) \quad (13)$$

czyli, po wyciągnięciu $q_{1,2}^{n+2}$ przed nawias:

$$a_{n+2} = \left(\frac{5c}{q_1} + \frac{4c}{q_1^2}\right) \cdot q_1^{n+2} + \left(\frac{5d}{q_2} + \frac{4d}{q_2^2}\right) \cdot q_2^{n+2} \quad (14)$$

Podstawiamy do nawiasów we wzorze (14) obliczone wartości i po uciążliwych rachunkach (uwierz mi, sprawdziłem to programem Maxima) okazuje się, że pierwszy nawias jest równy “c”, a drugi równy “d”. Dlatego:

$$a_{n+2} = c \cdot q_1^{n+2} + d \cdot q_2^{n+2} \quad (15)$$

czyli wzór ma identyczną postać jak (5), co kończy dowód.