$$Wierzchołki\ trójkąta:$$

$$A=(0,0,1) \quad B=(2,3,-2) \quad C=(1,1,4)$$

$$Poszukiwana\ wysokość\ trójkąta: h=\sqrt{(x_{C'}-x_C)^2+(y_{C'}-y_C)^2+(z_{C'}-z_C)^2}$$

gdzie $x_{C'}\ y_{C'}\ z_{C'}$ *to współrzędne punktu* C'*, który jest rzutem punktu* C *na prostą zawierającą bok trójkąta* AB

Wysokość trójkąta ABC *opuszczona z wierzchołka* C *na bok* AB *zawiera się w płaszczyźnie prostopadłej do prostej zawierającej bok* AB *— do płaszczyny tej należy oczywiście punkt* C*.*

Wyznaczam równanie prostej zawierającej bok AB*:*

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}=t$$

$$\frac{x-0}{2-0}=\frac{y-0}{3-0}=\frac{z-1}{-2-1}=t$$

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-3}=t$$

$$\begin{cases} x=2t \\ y=3t \\ z=1-3t \end{cases}$$

Wektor kierunkowy tej prostej $u^{\rightarrow}=[2;3;\ -3]$

Równanie płaszczyzny:

$$Px+Qy+Rz+S=0$$

Wektor normalny — prostopadły do tej płaszczyzny: $w^{\rightarrow}=[P,Q,R]$

Ponieważ prosta o wektorze kierunkowym $u^{\rightarrow}=[2;3;\ -3]$ *ma być prostopadła do płaszczyzny to:*

$$P=2, \qquad Q=3, \qquad R=-3$$

Po podstawieniu otrzymuję wzór płaszczyzny: $2x+3y-3z+S=0$

która ma zawierać punkt $C=(1,1,4)$ *więc:*

$$2\cdot 1+3\cdot 1-3\cdot 4+S=0$$

stąd: $S=7$

Punkt C' *to punkt wspólny płaszczyzny* $2x+3y-3z+7=0$ *i prostej* $\begin{cases} x=2t \\ y=3t \\ z=1-3t \end{cases}$

więc: $2\cdot(2t)+3\cdot(3t)-3\cdot(1-3t)+7=0$

stąd $t=-\frac{2}{11}$ *czyli* $\begin{cases} x=-\frac{4}{11} \\ y=-\frac{6}{11} \\ z=\frac{17}{11} \end{cases}$ $C'=\left(-\frac{4}{11},-\frac{6}{11},\frac{17}{11}\right)$

$$h=\sqrt{(x_{C'}-x_C)^2+(y_{C'}-y_C)^2+(z_{C'}-z_C)^2}=\sqrt{\left(1+\frac{4}{11}\right)^2+\left(1+\frac{6}{11}\right)^2+\left(4-\frac{17}{11}\right)^2}=3{,}02$$