

Tekst niebieski nie należy do rozwiązania

Zadanie 1.

W Wikipedii znalazłem definicję podnormalnej, która w połączeniu z treścią zadania daje równanie:

$$|y_0 f'(x_0)| = a$$

gdzie $y = f(x)$ jest funkcją do której wyznaczamy podnormalną w punkcie (x_0, y_0) .

Możemy ułożyć **dwa** równania różniczkowe.

(a) Jeżeli $y_0 > 0$ i $f'(x_0) > 0$ lub gdy oba znaki nierówności są przeciwne to pozbywamy się znaków $|\dots|$ i dla dowolnego punktu (x, y) mamy:

$$y \frac{dy}{dx} = a \quad (1)$$

(b) Jeżeli $y_0 > 0$ i $f'(x_0) < 0$ lub odwrotnie to pozbywamy się $|\dots|$ dopisując minus i mamy

$$y \frac{dy}{dx} = -a \quad (2)$$

Oba równania (1) i (2) są rozwiązaniami zadania przy założeniu, że pierwsze z nich obowiązuje dla funkcji rosnących dla $y \geq 0$ lub malejących dla $y \leq 0$, a drugie w odwrotnej sytuacji.

Dla sprawdzenia i z ciekawości rozwiążmy sobie równanie (1). Mamy:

$$y dy = a dx \quad \text{zatem} \quad \frac{1}{2} y^2 = ax + C$$

To równanie opisuje rodzinę parabol w kształcie $\subset$, czyli są to funkcje $y = f(x) = +\sqrt{2ax + C}$ rosnące dla dodatnich y lub funkcje $y = f(x) = -\sqrt{2ax + C}$ malejące dla ujemnych y .

Przy okazji: równanie (2) daje związek $y^2 = -2ax + C$ czyli drugą rodzinę parabol w kształcie $\supset$. Wróćmy do równania 1. Sprawdźmy czy podnormalne faktycznie mają stałą długość. Weźmy punkt $P(x_0, y_0)$. Normalna do krzywej w tym punkcie ma wzór:

$$y = \frac{x_0 - x}{f'(x_0)} + y_0 = \frac{(a + x_0 - x)\sqrt{2ax_0 + C}}{a}$$

Po prawej stronie wstawiłem naszą parabolę $f(x) = +\sqrt{2ax + C}$ i pozwoliłem sobie uprościć programem całe wyrażenie, w końcu nie jest to część zadania.

Gdy normalna przecina oś OX to wyrażenie w nawiasie ma się zerować więc wartość x_T punktu przecięcia wynosi: $x_T = a + x_0$. Rzut punktu P na oś OX na współrzędną $x_Q = x_0$ i długość odcinka x_T, x_Q wynosi: $|a + x_0 - x_0| = a$. Faktycznie jest stała.

Zadanie 2 na następnej stronie

Zadanie 2.

W Wikipedii znalazłem definicję podstycznej, która w połączeniu z treścią zadania daje równanie:

$$\left| \frac{y_0}{f'(x_0)} \right| = p$$

gdzie $y = f(x)$ jest funkcją do której wyznaczamy podstyczną w punkcie (x_0, y_0) .

Możemy ułożyć **dwa** równania różniczkowe.

(a) Jeżeli $y_0 > 0$ i $f'(x_0) > 0$ lub gdy oba znaki nierówności są przeciwne to pozbywamy się znaków $|\dots|$ i dla dowolnego punktu (x, y) mamy:

$$\frac{y}{\frac{dy}{dx}} = p \quad \text{zatem} \quad p \frac{dy}{dx} = y \quad (3)$$

(b) Jeżeli $y_0 > 0$ i $f'(x_0) < 0$ lub odwrotnie to pozbywamy się $|\dots|$ dopisując minus i mamy

$$-\frac{y}{\frac{dy}{dx}} = p \quad \text{zatem} \quad p \frac{dy}{dx} = -y \quad (4)$$

Oba równania (3) i (4) są rozwiązaniami zadania przy założeniu, że pierwsze z nich obowiązuje dla funkcji rosnących dla $y \geq 0$ lub malejących dla $y \leq 0$, a drugie w odwrotnej sytuacji.

Rozwiążmy dla sprawdzenia równanie (3). Mamy

$$p \frac{dy}{y} = dx \quad \text{zatem} \quad y = f(x) = C e^{x/p}$$

Rozwiązaniami jest rodzina funkcji wykładniczych, faktycznie rosnących dla dodatniego y pod warunkiem że $C > 0$. Przy okazji: równanie (4) da rozwiązanie $y = C e^{-x/p}$ czyli funkcje malejące dla dodatnich y .

Równanie stycznej do $f(x)$ w punkcie (x_0, y_0) ma postać:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 = \frac{C}{p} e^{x_0/p} (x + p - x_0)$$

Jak poprzednio podstawilem naszą funkcję $f(x)$ po prawej stronie. Zgadza się, prosta styczna przecina oś OX w punkcie $x_R = x_0 - p$, rzut punktu P na oś OX ma współrzędną $x_Q = x_0$ i odległość x_R, x_Q wynosi: $|x_0 - p - x_0| = a$. Jest stała.

Ciąg dalszy na następnej stronie

Zadanie 3 po raz pierwszy.

Weźmy funkcję $f(x)$ i punkt $P(x_0, y_0)$ na jej wykresie. Równanie normalnej w tym punkcie to:

$$y = \frac{x_0 - x}{f'(x_0)} + y_0$$

Znajdujemy przecięcie normalnej z osią OX. Gdy $y = 0$ to punkt przecięcia ma współrzędną x_T równą:

$$x_T = x_0 + y_0 f'(x_0)$$

Środek odcinka między punktem przecięcia normalnej z osią OX i punktem P to punkt S mający współrzędne:

$$x_S = \frac{x_0 + x_T}{2} = x_0 + \frac{1}{2}y_0 f'(x_0) \quad \text{oraz} \quad y_S = \frac{1}{2}y_0$$

Współrzędne (x_S, y_S) mają spełniać podane w zadaniu równanie paraboli, czyli $y_S^2 = ax_S$. Ponieważ punkt P może być wybrany dowolnie rezygnujemy z oznaczeń x_0, y_0 i piszemy po prostu x, y . Dostajemy stąd równość:

$$\frac{1}{4}y^2 = a \left(x + \frac{y}{2} \frac{dy}{dx} \right)$$

Właściwie to jeż jest rozwiązanie, ale możemy je jeszcze wyładnić obliczając dy/dx .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 4ax}{2ay} \tag{5}$$

Nie będziemy szukać rozwiązania równania (5), ale wstawmy dy/dx do równania na środek odcinka między punktem P i przecięciem normalnej z osią OX, tego trzeciego równania na górze strony podstawiając x_0, y_0 w miejsce x, y , aby się nie pomyliły oznaczenia”

$$x_S = x_0 + \frac{1}{2}y_0 \frac{y_0^2 - 4ax_0}{2ay_0} = x_0 + \frac{y_0^2}{4a} - x_0 = \frac{y_0^2}{4a} \quad \text{oraz} \quad y_S = \frac{1}{2}y_0$$

Ponieważ $y_S^2 = y_0^2/4$ oraz $ax_S = y_0^2/4$ widać, że warunek z zadania jest spełniony: $y_S^2 = ax_S$.

Zadanie 3 po raz drugi.

Przykro mi, ale za bardzo rozumiem treści tego zadania. Czy chodzi o to, aby te odległości raz były stałe od osi OX, innym razem od osi OY? Czyli 2 zadania w jednym? Napisz proszę na priv wyjaśnienie. (ale tego zestawu zadań już nie będę mógł poprawiać, bo na to jest tylko kilkanaście minut).

Zadanie 4 na następnej stronie

Zadanie 4.

Element ds długości krzywej w kartezjańskim układzie współrzędnych zapisuje się jako:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Element dP pola pod tą krzywą zapisujemy jako:

$$dP = y \, dx$$

Wprawdzie długość krzywej i pole pod nią są całkami z powyższych wyrażeń, ale jeśli proporcjonalność ma zachodzić **dla każdego** przedziału na osi OX to wyrażenia podcałkowe powinny być równe (**nie wiem, jak to udowodnić, nie jestem matematykiem**) czyli:

$$dP = k \, ds \quad \text{zatem} \quad y \, dx = dx \, k \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Z tego trzeba wydłubać dy/dx . Skracamy dx , podnosimy do kwadratu itd. Dostajemy:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2}{k^2} - 1} \tag{6}$$

Jeżeli miało być że to $k \, dP = ds$ to zastąp k przez $1/k$.

Z ciekawości zobaczmy, co to za krzywe. Weźmy $k = 1$, aby się nie pętało. Mamy równanie:

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = dx \quad \text{zatem} \quad \operatorname{arccosh} y = x + C$$

Z naszych obliczeń wynika, że rodzina kosinusów hiperbolicznych powinna być rozwiązaniami równania (6). Pasującą funkcją jest więc np. (podstawmy $C = 0$ dla prostoty)

$$y = \cosh x$$

Podstawiamy dy/dx , równe w tym wypadku $\sinh(x)$ do równania na element długości łuku i dostajemy:

$$ds = dx \sqrt{1 + \sinh^2 x} = dx \cosh x$$

ponieważ z “jedynki hiperbolicznej, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ więc $\sqrt{1 + \sinh^2} = \sqrt{\cosh^2} = \cosh x$
Element pola:

$$dP = dx \cosh x$$

więc wyraźnie widać, że długość łuku jest równa wielkości pola.

Zadania 5 na następnej stronie

Zadanie 5.

Weźmy $f(x)$. Styczna do wykresu w punkcie $P(x_0, y_0)$ ma równanie:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

Znajdujemy punkty przecięcia T i Q stycznej z obydwoma osiami. Dla osi OX podstawiamy $y = 0$, czyli:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \quad \text{zatem} \quad x_T = x_0 - \frac{y_0}{f'(x_0)} \quad \text{oraz} \quad y_T = 0$$

Dla osi OY podstawiamy $x = 0$ i mamy:

$$x_Q = 0 \quad \text{oraz} \quad y_Q = -f'(x_0)x_0 + y_0$$

Ponieważ punkt P ma leżeć na środku pomiędzy punktami T i Q to jego współrzędne są średnią arytmetyczną współrzędnych T i Q, co zapiszemy jako: $2x_0 = x_T + x_Q$ i to samo dla y . Muszą być jednocześnie spełnione 2 równania:

$$\begin{cases} 2x_0 = x_0 - \frac{y_0}{f'(x_0)} + 0 \\ 2y_0 = -f'(x_0)x_0 + y_0 + 0 \end{cases} \quad (7)$$

Na szczęście równania (7) są zależne (jakby nie były, to bym się naprawdę zdziwił), po pomnożeniu pierwszego z nich przez $f'(x_0)$ dostajemy:

$$x_0 f'(x_0) = -y_0$$

czyli wzór identyczny z drugim z równań (7).

Przy okazji - **WAŻNE!** - zakładamy, że $f'(x_0) \neq 0$, czyli funkcja $f(x)$ **NIE MA** ekstremów itp. Jasne, bo wtedy styczna by nie przecięła obu osi.

Ostatnie równanie dzielimy przez x_0 , zastępujemy x_0, y_0 przez x, y bo równanie ma być prawdziwe dla wszystkich punktów P i mamy szukane równanie różniczkowe:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad (8)$$

Ten minus w równaniu (8) jest **bardzo** istotny, gdyby go nie było to rozwiązaniami byłyby linie proste, przechodzące przez (0,0) i zadanie straciłoby sens. **Ale jest.** Rozwiążmy równanie (8)

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \quad \text{zatem} \quad \ln y = -\ln x + C \quad \text{czyli} \quad y = \frac{C}{x}$$

Rozwiązaniami jest rodzina hiperbol $xy = C$. Przy okazji wyszło ciekawe twierdzenie o takich hiperbolach. Załóżmy $C = 4$ i wstawmy pochodną funkcji $f(x) = 4/x$ do równania na styczną (to równanie na samej górze strony)

$$y = -\frac{4}{x_0^2}(x - x_0) + \frac{4}{x_0} = 4 \frac{2x_0 - x}{x_0^2}$$

Kończy mi się strona, nie chcę zaczynać kolejnej na bzdety. Zróbmy sprawdzenie w 2 punktach. Dla $x_0 = 2$ mamy na hiperboli $y_0 = 2$ i styczną: $y = 4 - x$. Warunek zadania jest zdecydowanie spełniony bo ta prosta, przecinając osie, tworzy równoramienne trójkąt prostokątny.

Zobaczmy $x_0 = 1, y_0 = 4$. Styczna ma równanie: $y = -4x + 8$. Przecina osie OX i OY w punktach: T(0,8) i Q(2,0). Widać, że punkt P(1,4) jest środkiem odcinka TQ.

Pozdrowienia - Antek

W razie pytań pisz proszę na priv.